



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRO-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

**De grafos a emparelhamentos: uma
possibilidade viável de encantar-se com a
matemática.**

Verônica Craveiro de Santana Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão-SE

Abril de 2014.

Verônica Craveiro de Santana Ferreira

De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática.

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Sergipe, como
parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves
Ramos

São Cristóvão-SE

Abril de 2014

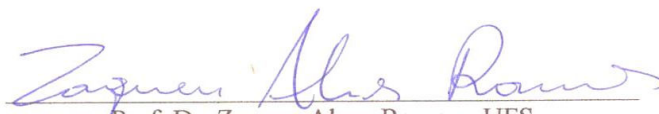
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática


por

Verônica Craveiro de Santana Ferreira


Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador



Prof. Dr. Ives Lima de Jesus - IFBA
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 10 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado forças e sabedoria para percorrer esta jornada de dois anos de muito trabalho e empenho.

Ao meu esposo, Lucas, companheiro de todas as horas que dividiu comigo todas as alegrias e tristezas nesta caminhada, sacrificando momentos de lazer e descanso. Serei eternamente grata pelo apoio e carinho nos momentos difíceis e por fazer cada dia da minha vida mais feliz.

Ao meu filho, Arthur, pelo sacrifício de ficar longos períodos longe da mãe dele, dedicando tão pouco tempo a nossas brincadeiras.

Aos meus pais, José e Maria, por entenderem que a minha ausência nas reuniões familiares era por uma boa causa.

Aos meus irmãos, em especial minha irmã Carmem, pelo apoio e ajuda com Arthur e por cuidar da minha casa tão bem.

À minha sogra, Cléa, sem ela não teria sido possível chegar até aqui. Me acolheu em seu lar para que pudesse dispor de tempo para estudar e assumiu muitas vezes o papel de mãe do meu filho. Muito obrigada.

Às minhas cunhadas Gabriela e Daniela, pelo apoio, incentivo e colaboração no cuidado com Arthur.

Ao meu orientador, Zaqueu Alves Ramos, pela confiança e por sua contribuição essencial para este trabalho. Você é um exemplo de profissional a ser seguido.

Aos professores, Ives Lima de Jesus e Kalasas Vasconcelos de Araújo, por aceitarem o convite de participar da minha banca examinadora.

Aos professores Almir Rogério, Danilo Felizardo, André Vinicius, Evilson Vieira, Anderson Cardoso, Lucas Rezende e Naldisson dos Santos pela dedicação e empenho em compartilhar seus conhecimentos que contribuíram bastante para o nosso crescimento profissional.

À SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, pela excelente iniciativa de promover um mestrado voltado para professores da educação básica.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa de estudos que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste mestrado profissionalizante.

Aos amigos Ginaldo Santos, Delmira Bispo, Joana Angélica e Djanira Nascimento pelo trabalho feito nos bastidores para que mais esta etapa da minha vida se concretizasse.

À Secretaria de Educação do Município de Nossa Senhora do Socorro pela concessão da licença para cursar o PROFMAT.

Aos meus colegas de curso pela amizade, pelo carinho, pelas risadas, por fazer nossos sábados mais divertidos e, é claro, pela troca de experiências e conhecimentos.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho e a realização deste sonho.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo mostrar que a teoria de grafos, sobretudo emparelhamentos, pode ser abordada no ensino médio de forma gradativa. E como a implementação desta teoria em sala de aula pode despertar nos estudantes o interesse pela matemática. Dessa forma, este trabalho pretende desmitificar a ideia de que a matemática se encerra com o conteúdo do ensino médio aproximando os estudantes das teorias desenvolvidas recentemente na academia. A teoria dos grafos é considerada uma ferramenta eficiente para resolver problemas em diferentes áreas. São inúmeras situações que podem ser modeladas por grafos que possibilitam desenvolver uma série de habilidades, por isso ela se torna tão atraente para quem entra em contato com a mesma. Para o desenvolvimento desta dissertação iniciamos nosso estudo abordando conceitos básicos da teoria de grafos úteis a compreensão deste trabalho, em seguida apresentamos alguns problemas que podem ser trabalhados no ensino médio e finalizamos com um tópico específico desta teoria, emparelhamentos, com muitas aplicações que podem ser contextualizadas e modeladas como problemas práticos do nosso cotidiano.

Palavras chaves: Grafos, algoritmos, grafos bipartidos, emparelhamento.

Abstract

This thesis aims to show that the theory of graphs, especially matching, can be studied in high school and gradually as the implementation of this theory in the classroom can foster in students interest in mathematics. Thus, this paper aims to demystify the idea that mathematics content ends with high school approaching students the theories recently developed in academy. The graph theory is considered an efficient tool to solve problems in various areas. There are numerous situations that can be modeled by that enable develop a range of skills, so it becomes so appealing to anyone who comes into contact with it. For the development of this thesis began our study addressing basic concepts of graph theory useful for understanding this work then present some problems that can be worked in high school and finalized with a specific topic of this theory, matchings, with many applications that can be modeled as contextualized and practical problems of everyday life.

Keywords: Graphs, algorithms, bipartite graphs, matchings.

Lista de Figuras

1.1	Pontes de Königsberg	13
1.2	Grafo utilizado por Euler	14
1.3	Dodecaedro regular	15
1.4	Dodecaedro planificado utilizado por Hamilton	15
1.5	Grafo com laço e arestas em paralelo	16
1.6	Grafo simples	16
1.7	Grafos Completos	18
1.8	Componentes conexas	21
1.9	Exemplo de árvore	21
1.10	Grafo de influência	22
1.11	Representação de uma cadeia alimentar	22
1.12	Exemplos de subgrafos	23
2.1	Grafo que modela o problema 2.1.1	25
2.2	Solução do problema 2.2.1	28
2.3	Solução do problema de Ramsey para $r = 3$	28
2.4	Mapa do Brasil utilizando apenas 4 cores	30
2.5	Grafo associado ao mapa do Brasil	30
2.6	Modelagem do problema 2.3.2	31
2.7	Solução do problema 2.3.2	31
3.1	Grafo de Petersen	37
3.2	Grafo de Sylvester	37
3.3	Cruzamento de dois caminhos	38
3.4	Grafo bipartido	39
3.5	Grafo bipartido completo $K_{3,4}$	39
3.6	Exemplos de emparelhamentos	39

3.7	Emparelhamento maximal	40
3.8	Emparelhamento perfeito	40
3.9	Grafo G que modela o exemplo 3.2.5	41
3.10	Solução do exemplo 3.2.5	41
3.11	Grafo G e emparelhamento M referentes ao exemplo 3.2.7	42
3.12	Grafo G que modela o problema 3.2.10	44
3.13	Emparelhamento M	44
3.14	Construção do caminho aumentante P e o emparelhamento M obtido	45
3.15	Tabuleiro de xadrez com dois cantos opostos removidos	48
3.16	Grafo que modela o problema 3.3.2	49
3.17	Grafo que modela o problema 3.3.3	50
3.18	Processo que descreve a execução do algoritmo húngaro	51
3.19	Grafo que modela o problema 3.3.4	51
3.20	Caminho aumentante P	52
3.21	Emparelhamento M'	52
3.22	Crescimento da árvore H	52
3.23	Emparelhamento M''	52
3.24	53
3.25	Johann Gutenberg 1398 -1468	56

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	13
1.1 Histórico	13
1.2 Definições básicas	15
2 Modelagens de problemas via grafos	24
2.1 Percorrendo caminhos	24
2.2 A relação de conhecimento entre pessoas	27
2.3 Coloração	29
2.4 Roteiro de implementação de grafos na sala de aula	33
3 Emparelhamentos	35
3.1 Histórico sobre emparelhamento	35
3.2 Definições básicas	37
3.3 Aplicações	48
Conclusão	54
Apêndice	56
Referências Bibliográficas	60

Introdução

A matemática não é uma ciência pronta e é por isso que ela vem sendo construída ao longo de muitos anos. Resultados e teorias milenares se mantêm válidos e úteis e ainda assim a matemática continua a desenvolver-se permanentemente.

As últimas descobertas mostram como a busca pela solução de grandes problemas matemáticos contribuiu para o desenvolvimento não só da matemática pura, através da interligação de ramos aparentemente disjuntos como teoria dos números, topologia, geometria diferencial, grafos, dentre outros, mas também da física, das telecomunicações, da computação, etc.

Mas na contramão destas descobertas, observamos que na realidade das salas de aula do ensino básico o que existe é um currículo que não acompanha esta evolução da matemática, diferente do que ocorre nos livros de história, geografia, física e biologia, por exemplo. De certa forma, este pode ser um dos motivos pelos quais os alunos enxerguem a matemática como uma ciência acabada, desinteressante e desconectada do mundo em que vivem. É importante que seja repensado o que é ensinado aos alunos. A escola precisa estar atenta ao conhecimento recente e incorporar nas suas práticas a abordagem dos mesmos. Por que é negada aos discentes a oportunidade de conhecer e experimentar um pouco das teorias que estão sendo desenvolvidas atualmente? Entrar em contato com este mundo de descobertas pode ser muito relevante e contribuir de alguma forma na diminuição da aversão que existe com a matemática por parte dos alunos.

É claro que não se deve esperar que isso seja fácil pois toda mudança provoca rejeição. Os alunos devem perceber a evolução dos conteúdos estudados por eles assim como suas aplicabilidades. Além disso, é importante destacar para os mesmos que a matemática não se encerra com o conteúdo do ensino médio. Deve-se mostrar que o que move a matemática não é simplesmente a habilidade ou facilidade em resolver questões e sim o desafio de ver de outra forma algo já existente e bem estabelecido. Assim como perceber que a criatividade é uma importante aliada no

ensino da matemática.

Fala-se muito na importância da interação entre os alunos em sala de aula na construção do conhecimento mas pouco se faz na prática. De fato, é notório a dificuldade enfrentada pelos docentes na tarefa de motivar os alunos envolvendo-os em atividades matemáticas, despertar o interesse e dedicação dos educandos ajudando-os a assimilarem, mais facilmente, os conhecimentos que lhes são repassados. Infelizmente, muitos dos professores também não tem a oportunidade de acompanhar o que está sendo desenvolvimento ultimamente em matemática. É por isso que, antes de falar em qualquer alteração no currículo de matemática não se deve esquecer do professor. Devem ser criadas cada vez mais chances do professor se capacitar e de se atualizar, para se manter conectado com o mundo que o cerca. Além disso, o professor deve refletir cada vez mais sobre suas práticas pedagógicas e se colocar mais no papel de pesquisador, sendo portanto, um exemplo para os seus alunos. Para isso, claro, a conscientização do seu papel e o compromisso com a educação devem ser seus principais guias.

Uma maneira de se implementar esta aproximação de teorias matemáticas mais atuais ao conteúdo do ensino médio pode ser feito através da teoria de grafos. Analisando os PCNs, observa-se que os mesmos não contemplam o desenvolvimento de tópicos da Matemática Discreta e muito menos a Teoria de Grafos nela contida. No entanto, em um documento mais recente [1], nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, encontramos alguns indicativos da pertinência de se trabalhar com grafos no ensino médio. Neste documento são apresentados alguns tópicos que, segundo [1], servem para serem trabalhados em feiras de ciência, laboratórios de matemática ou ainda para compor a parte diversificada do currículo. E dentre esses tópicos, os grafos são citados e destacam-se pelo aspecto lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos. Pode-se perceber a existência dos grafos em muitas situações cotidianas vivenciadas pelos alunos. Por isso se faz necessário a sua exploração e apresentação em aula como um recurso extremamente interdisciplinar ligado a muitas áreas do conhecimento.

A teoria dos grafos é um ramo da matemática que vem crescendo ao longo dos anos. Inicialmente surgiu como um desafio, no problema conhecido como “As Pontes de Königsberg”, mas com a invenção dos computadores foi ganhando espaço e atualmente é considerada uma ferramenta eficiente para resolver problemas em diferentes áreas como na matemática, nas engenharias, na indústria e no comércio.

Com a ideia de pontos interligados por linhas, a representação por grafos pode

facilitar o entendimento e a resolução de problemas. Existem várias situações no nosso cotidiano que podem ser representadas por um grafo. Desta forma, mapas que representam a estrutura organizacional de uma empresa, rotas de transporte, redes de comunicação, distribuição de produtos, assim como a estrutura química de moléculas, podem ser expressos através de grafos. De modo geral, o estudo sobre grafos vem crescendo nas últimas décadas, devido ao avanço de novas tecnologias computacionais, que permitem a resolução de problemas via algoritmos, com maior eficiência, rapidez e confiança. Assim, a crescente aplicabilidade desta teoria é um fator positivo para o desenvolvimento social.

Uma dessas situações interessantes citadas anteriormente trata da existência de n candidatos que desejam preencher m vagas distintas numa empresa, mas nem todos têm as competências necessárias para desempenhar qualquer uma das vagas. Esta situação pode ser representada por grafo bipartido, onde cada aresta liga um candidato a uma vaga que poderia eventualmente ocupar. Em teoria de grafos isso é um problema de emparelhamento de um subconjunto de vértices noutro subconjunto de vértices. Em outras palavras, um emparelhamento é um subconjunto de arestas onde não existe duas arestas incidentes a um mesmo vértice.

O primeiro estudo relacionado com emparelhamentos em grafos foi efetuado pelo matemático húngaro D. König que, em abril de 1914, em Paris, no Congresso de Filosofia Matemática, apresentava uma comunicação onde referia que todo o grafo bipartido regular admitiria um emparelhamento perfeito. Desde então, têm-se desenvolvido inúmeros resultados com emparelhamentos em grafos (bipartidos ou não) com muita aplicação quer na própria teoria de grafos, quer noutras áreas da matemática.

E são estas aplicações sobre emparelhamentos em grafos que trataremos neste trabalho. A partir de agora iremos expor a fundamentação teórica na qual se baseia o emparelhamento de grafos. No capítulo 1 iniciaremos com um pequeno apanhado histórico do surgimento e desenvolvimento da teoria dos grafos, em seguida formalizaremos conceitos básicos de grafos e suas principais características através de algumas definições e resultados. Tais conceitos serão importantes para nossas considerações nos capítulos seguintes. Ressaltamos que neste trabalho estudamos grafos finitos e escrevemos apenas grafos. No capítulo 2 apresentaremos algumas situações que podem ser modeladas por grafos. Tais situações podem ser abordadas inclusive em sala de aula como desafios aos estudantes. Neste capítulo queremos destacar como é possível inserir no dia a dia dos alunos alguns problemas que podem ser resolvidos por meio desta teoria e a importância de se fazer isto. Dessa forma queremos mostrar como

a matemática está impregnada em todas as nossas ações do cotidiano e como esta ciência é dinâmica, contrariando o pensamento equivocado de uma maioria. Finalmente, no capítulo 3, direcionaremos este trabalho a teoria do emparelhamento de grafos com uma breve abordagem histórica, seus principais teoremas e demonstrações, assim como sua aplicação em situações do dia a dia que são acessíveis aos estudantes do ensino médio.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos a noção de grafo e alguns conceitos a ela associados. Nosso principal objetivo nessa parte é por em evidência ao leitor que a matemática subjacente à teoria de grafos goza dos seguintes atributos: simplicidade, desafio, criatividade e utilidade na modelagem de problemas do dia a dia. Para isso, faremos uma breve abordagem histórica desde a origem, com a contribuição de Euler, até os dias atuais, com o desenvolvimento dos computadores. Finalmente, apresentaremos uma introdução ao formalismo da teoria.

1.1 Histórico

A teoria dos grafos teve seu surgimento no ano de 1736, quando Leonhard Euler se depara com o famoso problema das pontes de Königsberg (atual Kaliningrado). O centro da cidade de Königsberg é dividido pelo rio Pregel em quatro regiões as quais são ligadas por um complexo de sete pontes como mostra a Figura 1.1.

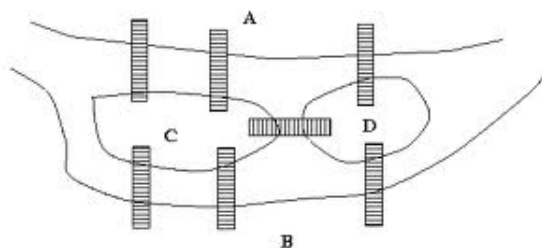


Figura 1.1: Pontes de Königsberg

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, voltando ao lugar de onde se saiu, sem repetir uma mesma ponte. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Euler generalizou o problema, de maneira muito elegante, através de um modelo de grafos. Ele o fez da seguinte maneira: a cada ilha e margem ele associou um ponto (vértice) e a cada ponte uma ligação (aresta). Com isso, ele obteve a Figura 1.2:

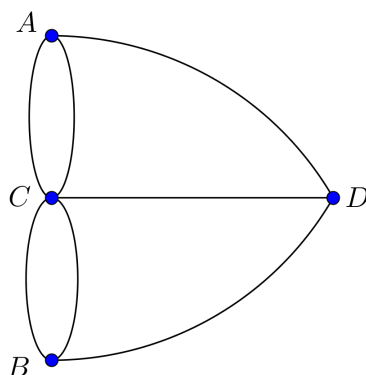


Figura 1.2: Grafo utilizado por Euler

Euler percebeu que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes. Por outro lado, como os moradores queriam atravessar cada ponte apenas uma vez, cada vértice deveria ter um número par de arestas. Logo, se tornaria impossível fazer um percurso seguindo as regras impostas pelos moradores.

A resolução do problema das pontes, por Euler, acabou sendo vista pela comunidade científica da época sem maior importância, simplesmente como uma charada matemática. Por isso esta descoberta ficou adormecida cerca de 150 anos até que em 1847, Gustav Robert Kirchhof - cientista nascido na cidade de Königsberg (1824 a 1887) - ao estudar circuitos elétricos utilizou modelos de grafos, criando a chamada teoria das árvores. Com isso, outros cientistas começaram a notar a provável aplicabilidade desta teoria e dez anos mais tarde Arthur Cayley - britânico nascido em Richmond (1821 a 1895) - utilizou a ideia de árvores para outras aplicações tais como a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

A teoria dos grafos contou ainda com o importante auxílio do irlandês William

Rowan Hamilton (1805 a 1865) - que foi um matemático, físico e astrônomo - que ao inventar um jogo simples que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez, deu origem ao estudo de grafos Hamiltonianos.

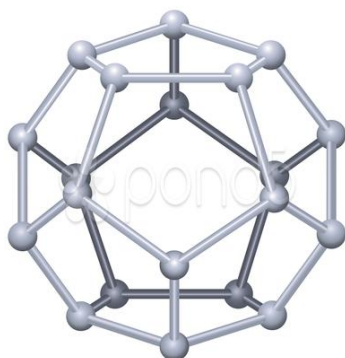


Figura 1.3: Dodecaedro regular

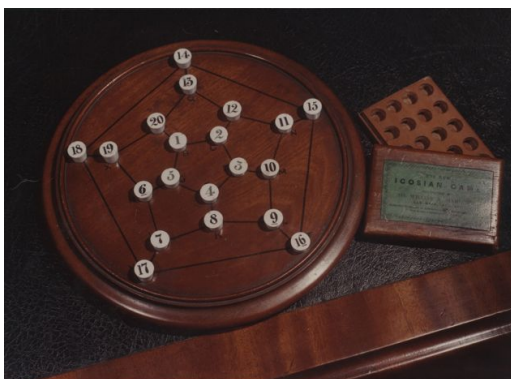


Figura 1.4: Dodecaedro planificado utilizado por Hamilton

A partir de 1970, a teoria dos grafos teve um grande salto com o desenvolvimento acelerado dos computadores, os quais, após a 2ª guerra mundial alcançaram seu apogeu com a criação do primeiro software para microcomputador criado pelos estudantes William (Bill) Gates e Paul Allen. Foi então que surgiram publicações referentes a algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades para utilização aplicada da teoria dos grafos.

No Brasil a teoria dos grafos chegou, segundo [2], no ano de 1968 com a apresentação de trabalhos sobre esta teoria no I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Desde então, algumas universidades como UFRJ, UFF, USP, UNESP e UNICAMP, começaram a realizar trabalhos de pesquisa sobre teoria dos grafos, sendo que hoje em dia essas mesmas universidades possuem em seus quadros de docentes, pesquisadores em teoria dos grafos e aplicações.

1.2 Definições básicas

Como veremos, a noção de grafo é simples, intuitiva e abstrata. A grosso modo, ela é útil para representar algum tipo de relação entre objetos. A definição formal dessa estrutura combinatória é dada da seguinte maneira:

Definição 1.2.1. Um *grafo* G é uma tripla ordenada (V, E, I) , onde V e E são conjuntos finitos e $I \subseteq V \times E$ satisfaz

$$1 \leq |\{v \in V : (v, e) \in I\}| \leq 2$$

para todo $e \in E$.

Notação: Os elementos dos conjuntos $V := V(G)$, $E := E(G)$ e $I := I(G)$ são chamados, respectivamente, de *vértices*, *arestas* e *incidências* de G . O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$; portanto, $n(G) = |V(G)|$ e $m(G) = |E(G)|$.

Estes dois parâmetros básicos são chamados de *ordem* e *dimensão* de G , respectivamente.

Definição 1.2.2. É dito que a aresta e é *incidente* ao vértice v , quando $(v, e) \in I$.

Dois vértices em um grafo G serão ditos *adjacentes* (ou *vizinhos*) se existe uma aresta que incide a ambos. Quando duas arestas forem incidentes a um mesmo par de vértices elas serão chamadas de *arestas em paralelo*. Outra possibilidade é uma aresta ser incidente a um único vértice, neste caso diremos que tal aresta é um *laço*.

A representação geométrica de um grafo no plano dar-se da seguinte forma: cada vértice corresponde a um ponto e cada aresta a um segmento de reta, cujos extremos representam os vértices incidentes a esta aresta.

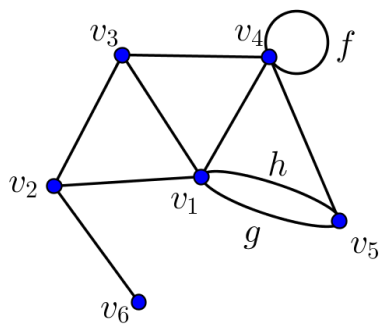


Figura 1.5: Grafo com laço e arestas em paralelo

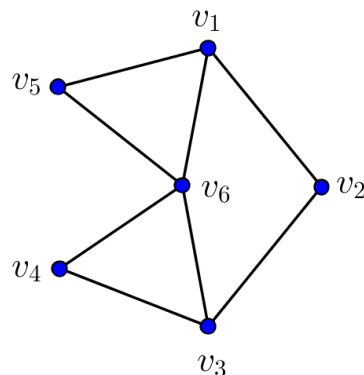


Figura 1.6: Grafo simples

A Figura 1.5 ilustra a representação geométrica de um grafo em que as arestas g e h estão em paralelo e a aresta f é um laço. Notemos que nesse grafo os vértices v_2 e v_6 são exemplos de vértices adjacentes enquanto que v_1 e v_6 não são adjacentes.

Para uso em diversas aplicações é suficiente considerar grafos como na seguinte definição:

Definição 1.2.3. Um *grafo simples* é um grafo sem laços e arestas em paralelo.

Observação 1.2.4. Notemos que o grafo que modela o problema das pontes de Königsberg não é um grafo simples. Porém, na maioria dos problemas considerados na prática, e nos nossos exemplos adiante, os grafos são simples, ver Figura 1.6.

Em um grafo simples uma aresta é completamente determinada pelos vértices que ela incide. Por esse motivo, uma aresta e em um grafo simples pode ser representada por $e = xy$ onde x e y são os vértices aos quais a aresta e incide.

Como mencionado acima, a ideia básica da prova de Euler para o problema das pontes de Königsberg consistia em contar as arestas que incidiam a um dado vértice e confrontar este número com as restrições do problema. Em um grafo $G = (V, E, I)$ qualquer chamaremos o número de arestas que incidem a um vértice v de *grau* de v .

Notação: $g(v) :=$ grau do vértice v .

O conjunto de vértices adjacentes a um dado vértice v em um grafo G é chamado a *vizinhança* de v em G e será denotado por $N_G(v)$, ou simplesmente por $N(v)$ caso não haja ambiguidade. Em um grafo simples G temos em particular que $g(v) = |N(v)|$ qualquer que seja $v \in V(G)$.

Analogamente, denotaremos por $N_G(T)$ a vizinhança de um conjunto T de vértices no grafo G , isto é, o conjunto de vértices de G adjacentes a algum vértice de T . Em símbolos,

$$N_G(T) = \bigcup_{v \in T} N_G(v)$$

Na Figura 1.5 temos:

$$g(v_3) = 3,$$

$$N(v_2) = \{v_1, v_3, v_6\}$$

e

$$N(\{v_1, v_2\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = V(G)$$

Quanto a existência de arestas em um grafo simples temos as seguintes situações extremas:

Definição 1.2.5. Seja G um grafo simples.

- (i) G é dito *grafo completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes.
- (ii) G é dito *grafo independente* se quaisquer dois vértices de G não são adjacentes.

Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Já um grafo independente com n vértices é denotado por $\overline{K_n}$.

Observação 1.2.6. A notação utilizada para grafos completos é uma homenagem ao matemático polonês Kasemir Kuratowski que foi o primeiro a obter, em 1930, uma caracterização de planaridade por meio deste tipo de grafo.

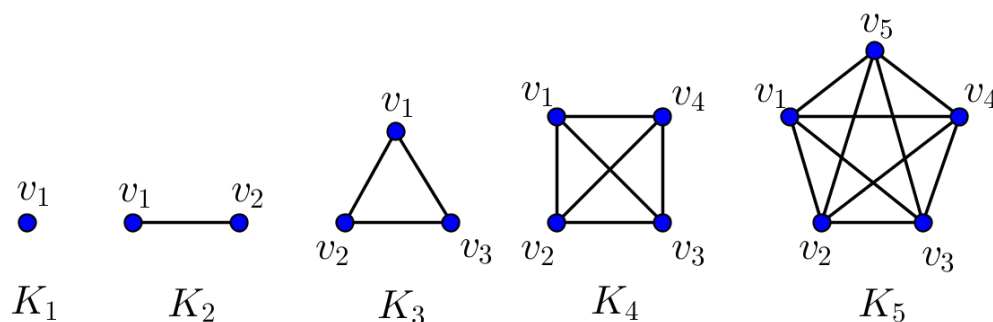


Figura 1.7: Grafos Completos

Note que em um grafo completo com n vértices todos os vértices tem mesmo grau ($n - 1$), conforme mostra a Figura 1.7.

Definição 1.2.7. Em um grafo G , um *caminho* λ é uma sequência $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, onde $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ são vértices de G , e_1, e_2, \dots, e_n são arestas de G e, para $i \in 1, 2, \dots, n$, os vértices de G incidentes com e_i são v_{i-1} e v_i .

Em um grafo simples, podemos representar um caminho apenas como uma sequência de vértices, em que quaisquer dois vértices consecutivos estão ligados por uma aresta e esta é única.

Definição 1.2.8. Sejam G um grafo e λ um caminho em G . Diremos que n é o *comprimento* de λ , que é denotado por $|\lambda|$. Temos que $|\lambda|$ é igual ao número de arestas que compõe λ . Chamaremos v_0 e v_n de *vértices terminais* de λ e v_1, v_2, \dots, v_{n-1} de *vértices interiores*.

Diremos que λ liga v_0 a v_n ou que é um v_0v_n -caminho. Quando os vértices v_0, v_1, \dots, v_n são dois a dois distintos diremos que o caminho é simples, e quando $v_0 = v_n, |\{v_1, v_2, \dots, v_n\}| = |\{e_1, e_2, \dots, e_n\}| = n$, chamaremos o caminho de *ciclo* (*circuit*).

Um caminho é dito *euleriano* se este caminho passa por todas as arestas uma única vez num dado grafo. Um *grafo é euleriano* se ele contém um ciclo euleriano, ou seja, um caminho cujos extremos coincidem.

Os caminhos eulerianos levam este nome em homenagem a Leonard Euler. O problema das Pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736, é o exemplo histórico de um problema que buscava encontrar um ciclo euleriano. Hoje, podemos incluir além dos problemas de rotas, passatempos como desenhar figuras sem retirar o lápis do papel.

Nos caminhos eulerianos, precisamos percorrer todas as arestas do grafo sem repeti-las. Como consequência dessa exigência decorre uma condição para que um grafo contenha caminhos eulerianos ou não. A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada em [6].

Corolário 1.2.9. *Um grafo conexo G admite caminho euleriano se, e somente se, exatamente dois vértices de G tem grau ímpar.*

As aplicações de caminhos eulerianos aparecem em problemas de atendimento sequencial a um grande número de usuários tais como entregas domiciliares ou recolhimento (correio, luz, água, telefone). Em todas os casos o problema é modelado associando-se um vértice a cada ponto de atendimento. As arestas correspondem as ligações entre os pontos. Na maioria das vezes o interesse está em obter um ciclo, visto que, em geral, o dispositivo de atendimento deve retornar ao ponto de partida.

Um caminho que contém todos os vértices de um grafo é chamado de caminho *hamiltoniano*; da mesma forma, um ciclo que contém todos os vértices de um grafo é chamado *ciclo hamiltoniano*. Um grafo é hamiltoniano se ele contém um ciclo hamiltoniano. Por exemplo, os grafos completos com pelo menos três vértices são hamiltonianos.

Em contraste aos grafos eulerianos, ainda não se conhece uma condição necessária e suficiente que nos permita decidir de forma eficiente se um grafo é hamiltoniano. Na verdade, a existência ou não de uma tal condição é um dos principais problemas não resolvidos da teoria dos grafos, ver [3].

Note como os grafos nos possibilitam trazer situações do cotidiano dos alunos para

a sala de aula abordando temas como coleta de lixo e distribuição de correspondência. Isto pode ser feito a partir da apresentação de problemas desafiadores e com enunciados bastante simples. E a partir destes problemas podemos encontrar relações com outras disciplinas. Como exemplo podemos buscar na geografia e história o surgimento e desenvolvimento desenfreado de cidades e na biologia suas consequências para o meio ambiente. Ao mesmo tempo, é possível criar dentro da sala de aula um espaço onde os estudantes podem discutir possíveis soluções para estes problemas. Dessa forma, é possível contribuir para o processo de formação de cidadãos críticos e agentes transformadores da sociedade em que vivem. Podemos afirmar então que grafos são uma importante ferramenta que colabora com a transversalidade e interdisciplinaridade na escola. É importante lembrar que a tarefa de contextualizar nem sempre é possível ou fácil e requer muito empenho e dedicação dos educadores.

Diante da definição de caminho dada anteriormente, podemos dizer que a existência de um caminho que une dois vértices quaisquer define um grafo conexo. Sua definição formal é dada por:

Definição 1.2.10. Seja $G = (V, E, I)$ um grafo. G diz-se *conexo* se e só se, dados quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, com $u \neq v$, existe um caminho em G que une u a v . Caso contrário o grafo diz-se *desconexo*.

Os grafos das Figuras 1.5 e 1.6 são exemplos de grafos conexos; o grafo da Figura 1.8 é um exemplo de um grafo desconexo.

Definição 1.2.11. Seja $G = (V, E, I)$ um grafo. Uma *componente conexa* C de G é um grafo $C = (V', E')$, tal que $V' \subset V$, $E' \subset E$ e:

1. $E' = \{v_1v_2 \in E : v_1, v_2 \in V'\}$;
2. C é conexo;
3. para todo $v \in V \setminus V'$ e para todo $v' \in V'$, a aresta $vv' \notin E$.

É importante destacar que existem muitos argumentos sobre grafos que podem ser reduzidos à componentes conexas. Na Figura 1.8 está representado um grafo com várias componentes conexas.

De posse dos conceitos de ciclo e grafo conexo podemos definir uma árvore da seguinte maneira:

Definição 1.2.12. Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos.

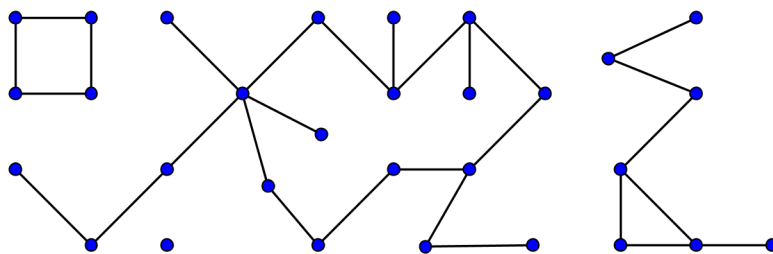


Figura 1.8: Componentes conexas

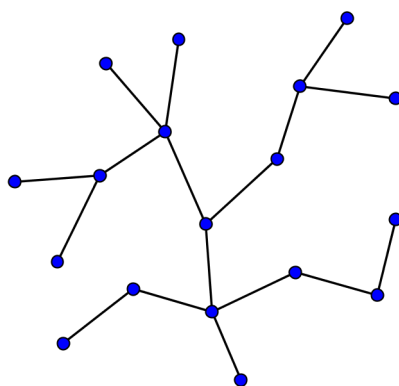


Figura 1.9: Exemplo de árvore

Na Figura 1.9 temos um exemplo de árvore.

Embora muitos problemas prestam-se, naturalmente, a uma modelagem via grafos, o conceito deste, por vezes não é muito adequado. Ao lidar com problemas de fluxo de tráfego, por exemplo, é necessário saber quais ruas da cidade são de sentido único, e no qual se é permitido a direção de tráfego. Claramente, um grafo da rede não é de grande utilidade em tal situação. Neste caso necessita-se de um grafo em que seja atribuída a cada aresta uma orientação – um grafo orientado.

Definição 1.2.13. Um *grafo orientado* (dígrafo) $G = (V, E, I)$ é um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta é um par ordenado de vértices distintos.

Da definição do conjunto das arestas de um grafo orientado, conclui-se que as arestas (x, y) e (y, x) são distintas, para $x, y \in V(G)$. Além disso, se $(x, y) \in E(G)$, diz-se que x é a origem e y é a extremidade da aresta (x, y) , ou que (x, y) é orientada

de x para y , e a aresta representa-se por um arco orientado.

Segundo [10], nos estudos de comportamento de grupos é observado que certas pessoas podem influenciar o pensamento de outras. Um grafo orientado chamado de grafo de influência pode ser usado para modelar este comportamento. Cada pessoa do grupo é representada por um vértice. Há uma aresta orientada do vértice a para o vértice b quando a pessoa representada pelo vértice a influencia a pessoa representada pelo vértice b . Um exemplo de um grafo de influência para membros de um grupo é exibido na Figura 1.10.

Uma outra aplicação importante que necessita de dígrafo para representá-la pode ser encontrada na biologia. A cadeia alimentar pode ser representada por um grafo orientado, ver Figura 1.11.

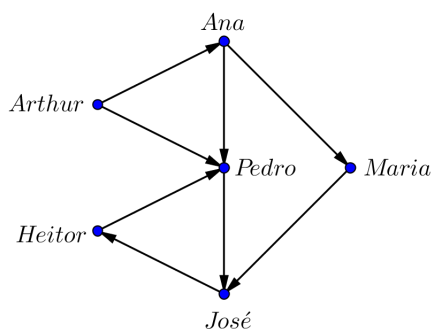


Figura 1.10: Grafo de influência

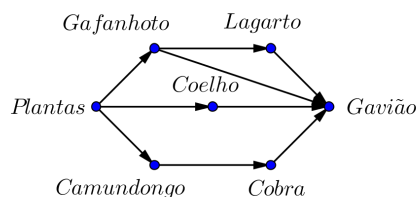


Figura 1.11: Representação de uma cadeia alimentar

As vezes precisamos apenas de parte de um grafo para resolver um problema. Por exemplo, podemos nos importar apenas com uma parte de uma grande rede de computadores que envolva os centros de computadores em São Paulo, Pernambuco, Amazonas e Brasília. Então podemos ignorar outros centros de computadores e todas as linhas telefônicas que não liguem dois destes quatro centros especificados. No modelo de grafos para a grande rede, podemos remover os vértices correspondentes aos outros centros de computadores, além dos quatro de interesse, e podemos remover todas as arestas incidentes com um vértice que tenha sido removido. Quando arestas e vértices são removidos de um grafo, sem remover extremidades de quaisquer arestas remanescentes, é obtido um grafo menor. Tal grafo é chamado de subgrafo do grafo original.

Definição 1.2.14. Um grafo $H = (W, F, I')$ é dito um *subgrafo* de um grafo $G =$

(V, E, I) caso $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$, e denotaremos por $H \subseteq G$.

Um subgrafo $H \subseteq G$ é *gerador* se H contém todos os vértices do grafo G . Dado um conjunto de vértices $W \subseteq V$, dizemos que um subgrafo $H = (W, F, I')$ de um grafo $G = (V, E, I)$ é *induzido* por W se toda aresta de G com extremidades em W pertence a F . Denotaremos por $H = G[W]$, o subgrafo $H \subseteq G$ induzido por $W \subseteq V$. Analogamente, dado um conjunto de arestas $F \subseteq E$, definimos o subgrafo $H = G[F]$ induzido por F .

O grafo $G \setminus v$, obtido do grafo G pela remoção de um vértice v , é o subgrafo induzido pelo conjunto $V \setminus \{v\}$. Analogamente, o grafo $G \setminus H$, obtido do grafo G pela remoção de um subgrafo H , é o subgrafo induzido pelo conjunto $V(G) \setminus V(H)$.

Na Figura 1.12 considere o grafo G e dois exemplos de subgrafos. Temos que o subgrafo H_1 é um exemplo de subgrafo gerador enquanto o subgrafo H_2 é um exemplo de subgrafo induzido pelo conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

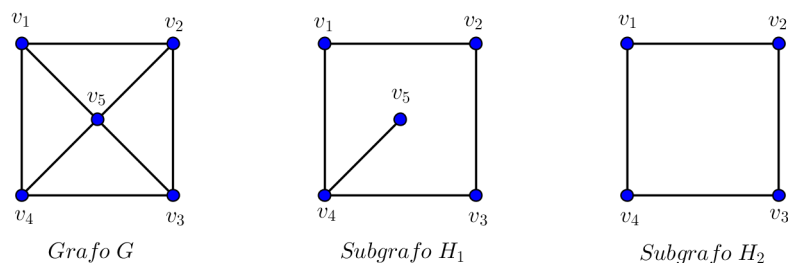


Figura 1.12: Exemplos de subgrafos

Capítulo 2

Modelagens de problemas via grafos

São inúmeras as situações que podem ser modeladas por grafos, por isso esta estrutura é considerada tão importante. Alguns problemas são extremamente simples enquanto que outros são bastante sofisticados. Neste capítulo vamos acompanhar algumas destas situações e ao final apresentaremos algumas sugestões de atividades que podem ser executadas em sala de aula.

2.1 Percorrendo caminhos

A utilidade da estrutura de grafos para modelagens é tão grande que, como vimos anteriormente, até sua origem está relacionada a esse fato. O problema que apresentaremos a seguir, assim como o das pontes de Königsberg, refere-se a escolha de caminhos.

Problema 2.1.1. Considere uma malha rodoviária interligando 5 cidades de Sergipe. Suponhamos que uma transportadora de Aracaju deseja realizar quatro entregas em um dia nas cidades de São Cristovão, Laranjeiras, Barra dos Coqueiros e Socorro e retornar a Aracaju no final do dia. Conhecendo-se a distância entre cada par de cidades vizinhas, busca-se determinar um roteiro que permita visitar todas as cidades de modo que o percurso total seja mínimo. As distâncias entre as cidades são dadas pela tabela abaixo, em quilômetros.

Solução: Podemos construir um modelo para esta viagem, representando cada cidade a visitar por um vértice de um grafo e o caminho entre cada uma delas por uma aresta.

	Barra dos Coqueiros	Socorro	Laranjeiras	São Cristovão
Aracaju	5 km	13 km	19 km	17 km
Barra dos Coqueiros		52 km	60 km	77 km
Socorro			8 km	25 km
Laranjeiras				33 km

Para completar o modelo, adicionamos um número chamado peso a cada aresta. O peso representa a distância (em quilômetros) que separa as cidades representadas pelos vértices que se encontram na extremidade da aresta. Note que neste problema estamos considerando um grafo completo com 5 vértices (K_5), conforme mostra a Figura 2.1

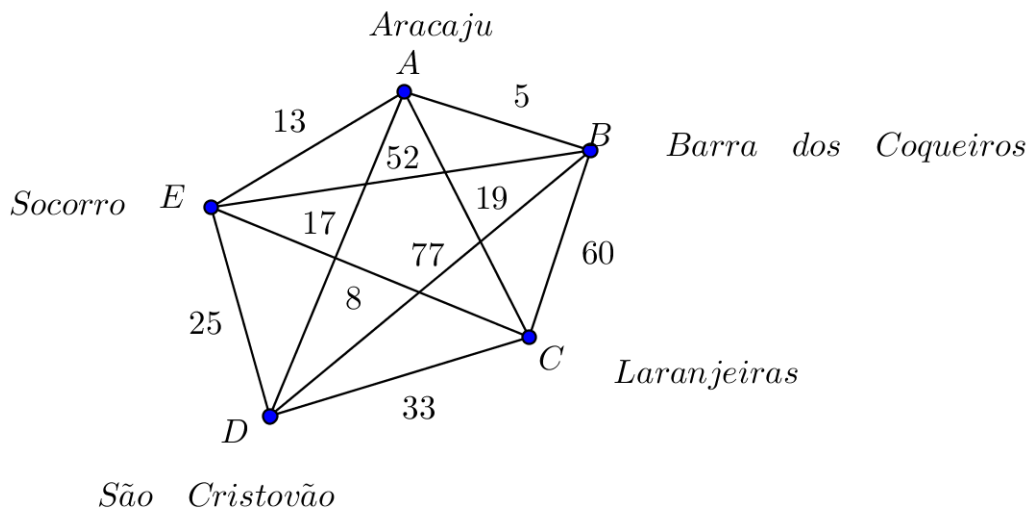


Figura 2.1: Grafo que modela o problema 2.1.1

Uma forma de resolver este problema é usar o método da exaustão. Este método consiste em fazer uma lista de todos os ciclos Hamiltonianos do grafo, calcular o peso de cada um e escolher um de peso mínimo. Um caminho em K_n é determinado por uma sequência de vértices distintos. Para ser um ciclo Hamiltoniano, todos os vértices devem ocorrer na sequência, e o último vértice deverá ser igual ao primeiro. Logo, existem $n!$ sequências distintas. No entanto, para o nosso problema, devemos fixar o vértice inicial e assim obtemos um total de $4! = 24$ ciclos Hamiltonianos distintos em K_5 . No entanto, note que, percorremos a mesma distância quando percorremos um ciclo na ordem inversa, logo precisamos considerar apenas 12 ciclos diferentes para

encontrar a distância mínima total que deve ser percorrida. Os ciclos possíveis com início e término na cidade A encontram-se na tabela abaixo.

Ciclo Hamiltoniano	Distância Total	Ciclo Inverso
A-B-C-D-E-A	5+60+33+25+13= 136 km	= A-E-D-C-B-A
A-B-C-E-D-A	5+60+8 +25+17= 115 km	= A-D-E-C-B-A
A-B-D-C-E-A	5+77+33+8 +13= 136 km	= A-E-C-D-B-A
A-B-D-E-C-A	5+77+25+8 +19= 134 km	= A-C-E-D-B-A
A-B-E-C-D-A	5+52+8 +33+17= 115 km	= A-D-C-E-B-A
A-B-E-D-C-A	5+52+25+33+19= 134 km	= A-C-D-E-B-A
A-C-B-D-E-A	19+60+77+25+13= 194 km	= A-E-D-B-C-A
A-C-B-E-D-A	19+60+52+25+17= 173 km	= A-D-E-B-C-A
A-C-D-B-E-A	19+33+77+52+13= 194 km	= A-E-B-D-C-A
A-C-E-B-D-A	19+8 +52+77+17= 173 km	= A-D-B-E-C-A
A-D-B-C-E-A	17+77+60+ 8+13= 175 km	= A-E-C-B-D-A
A-D-C-B-E-A	17+33+60+52+13= 175 km	= A-E-B-C-D-A

De acordo com a tabela temos que os percursos que minimizam os custos são A-B-C-E-D-A, A-B-E-C-D-A e seus caminhos inversos. Em qualquer um dos casos, o percurso é de 115 km.

Este método é, em geral, impossível de implementar já que o número de operações a efetuar é da ordem de $(n - 1)!$ para K_n .

Outra forma de resolver este problema é através do método do vizinho mais próximo, também conhecido como algoritmo guloso. Escolhe-se um vértice e a aresta de menor peso incidente nesse vértice. Esta aresta determina um outro vértice. De cada novo vértice escolhe-se a aresta de menor peso, de entre as arestas que são incidentes nesse vértice e num vértice que ainda não foi escolhido. No final, regressa-se ao vértice inicial.

No caso deste problema, por este algoritmo ele começa pelo vértice A . De A vai para B , de B para E , depois para C e finalmente para D , de onde regressa a A .

O método do vizinho mais próximo é muito mais rápido do que o método de exaustão, embora não produza, em geral, uma solução ótima. Se considerarmos como uma única operação a procura dentre todas as arestas incidentes num dado vértice da aresta de menor peso, então em K_n temos de efetuar uma operação para o primeiro vértice, uma operação para o segundo, e assim sucessivamente. Quando chegarmos ao último vértice ainda não escolhido a única hipótese é voltar ao vértice inicial. Logo, o custo deste algoritmo é da ordem das $n - 1$ operações.

É interessante destacar que na generalização deste problema há uma matemática muito complexa e fundamentada. Mas, fazendo as devidas adequações, qualquer estudante de ensino médio pode ter contato com ela.

Este problema é uma adaptação do famoso problema do caixeiro viajante que tem desafiado os investigadores na procura de um bom algoritmo. Este problema pertence a uma classe de problemas conhecidos como NP-completos ou NP-difíceis, para os quais não se acredita ser possível encontrar um algoritmo de complexidade polinomial. Uma das atividades mais importantes na matemática discreta é a procura de algoritmos eficientes que forneçam uma boa aproximação da solução ótima destes problemas. É o que acontece com o problema do caixeiro viajante para o qual já existe alguns algoritmos heurísticos que fornecem rapidamente uma solução aproximada.

2.2 A relação de conhecimento entre pessoas

Um grupo de n pessoas pode ser pensado como um grafo onde cada pessoa corresponde a um vértice e dois vértices desse grafo são adjacentes se as respectivas pessoas se conhecem. Um boa sugestão de atividade neste contexto é o seguinte problema:

Problema 2.2.1. Mostrar que em qualquer grupo de seis pessoas ou existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 que se desconhecem mutuamente

Uma solução para este problema pode ser dada da seguinte maneira:

Solução: Modelando o problema na linguagem de grafos, a questão reduz-se a mostrar que todo grafo com 6 vértices contém um K_3 ou um $\overline{K_3}$. Para verificar isso, faremos a seguinte representação: quando dois vértices forem adjacentes utilizaremos linha cheia e caso contrário usaremos linha tracejada. Fixemo-nos em um vértice v_1 de tal grafo. Nesse vértice incidem 5 linhas onde, pelo princípio da casa dos pombos, devemos ter pelo menos 3 dessas linhas do mesmo tipo. Digamos que estas sejam linhas cheias e que elas vão para os vértices v_2 , v_3 e v_4 . Se uma das linhas no triângulo $v_2v_3v_4$ for cheia, por exemplo a linha ligando v_2 a v_3 , então temos um K_3 formado pelo triângulo $v_1v_2v_3$, caso contrário temos um independente formado pelos vértices v_2 , v_3 e v_4 como mostra a Figura 2.2.

Um outro problema relacionado ao anterior é :

Problema 2.2.2. Mostrar que o menor número n tal que em qualquer grupo de n pessoas tenhamos a garantia da existência de 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que se desconhecem mutuamente é exatamente $n = 6$.

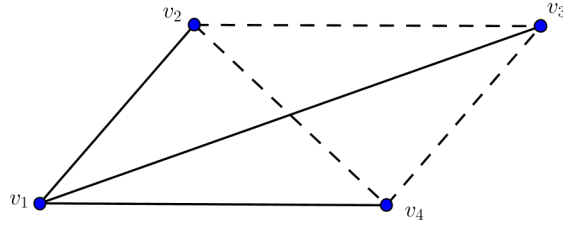


Figura 2.2: Solução do problema 2.2.1

Solução: Para resolver este problema basta-nos apresentar um grafo com 5 vértices que não contenha K_3 nem \overline{K}_3 como subgrafos induzidos. Tal exemplo de grafo é dado pela Figura 2.3.

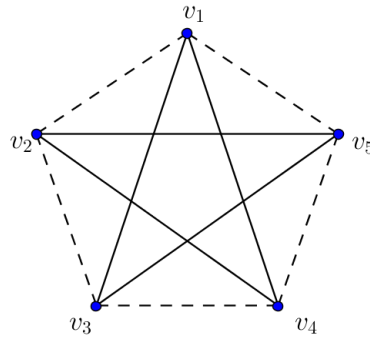


Figura 2.3: Solução do problema de Ramsey para $r = 3$

A generalização do Problema 2.2.1 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.2.3. (Ramsey) *Para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo G de ordem n contém K_r ou \overline{K}_r como subgrafo induzido, [7].*

Dado $r \in \mathbb{N}$, o menor número $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz o teorema acima é chamado o *número de Ramsey* de r e é denotado por $R(r)$. As soluções dos Problemas 2.2.1 e 2.2.2 nos deram que $R(3) = 6$. Com um pouco de reflexão podemos também deduzir que $R(4) = 18^1$. Contudo, é ainda desconhecido o valor exato do número $R(5)$. O que se conhece até o momento sobre ele são as seguintes estimativas:

$$43 \leq R(5) \leq 49$$

¹Uma ótima sugestão de desafio é mostrar esta igualdade

O teorema de Ramsey é um resultado fundamental em combinatória. Para se ter uma ideia, este resultado é tão importante que existe uma teoria combinatória decorrente dele denominada *teoria de Ramsey*.

Notemos que o teorema de Ramsey nos conduz a uma situação bastante típica em matemática em que sabemos sobre a existência de um determinado objeto mas não sabemos explicitá-lo.

2.3 Coloração

Depois do problema da pontes de Königsberg, o teorema das quatro cores é o mais famoso problema de Teoria de Grafos. Este teorema foi por mais de um século uma conjectura em aberto. Ela ocorreu a Francis Guthrie enquanto coloria um mapa da Inglaterra. Seu irmão a comunicou a De Morgan em outubro de 1852, que por sua vez a relatou a seus alunos e outros matemáticos, começando por difundi-la. O seu enunciado era aproximadamente o seguinte: por que razão, quando dividimos qualquer figura em zonas coloridas, de modo que duas zonas que tenham fronteira comum fiquem com cores diferentes, precisamos, no máximo, de quatro cores? A simplicidade de seu enunciado parece induzir à suposição de que sua demonstração seria simples também. No entanto foram várias as tentativas de demonstrá-la, o que contribuiu para grandes avanços em teoria de grafos. E foi em 1976 que K. Appel e W. Haken apresentaram uma prova de que a conjectura é correta. Esta prova envolve, além de argumentos elaborados e sofisticados, 1200 horas de cálculo em computador, e é por isso que alguns consideram que não foi ainda resolvido satisfatoriamente, ver [8].

Podemos considerar o seguinte problema para sala de aula:

Problema 2.3.1. Mostre que é possível colorir o mapa do Brasil utilizando apenas 4 cores de modo que estados vizinhos tenham cores distintas.

Solução: Dado o mapa do Brasil podemos pensar cada estado como um vértice e que dois desses vértices são adjacentes se os respectivos estados são vizinhos. Inicialmente ordenaremos os estados em ordem não-crescente de grau. Note que quanto maior o grau de um vértice, mais difícil será colorir esse vértice. Por ter mais vértices adjacentes que os outros, esse vértice fica mais restringido para seleção de uma cor. Então, tal vértice deverá ser colorido o mais cedo possível. Isso resultará no algoritmo do maior primeiro. Supondo uma ordem de percurso dos vértices. Atribuímos uma

Note que neste problema já temos a garantia de que 4 cores são suficientes pois o grafo que modela este mapa é planar. A caracterização de um grafo planar foi dada pelo matemático Kasemir Kuratowsky. Segundo o teorema que ele estabeleceu, um grafo não é planar se e somente se ele contiver um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ou K_5 . E pelo teorema das quatro cores o número cromático de um grafo planar não é maior do que quatro. O número cromático de um grafo é o menor número de cores necessárias para a coloração deste grafo, ver [4].

Veamos agora um problema muito interessante que também pode ser desenvolvido em sala de aula envolvendo coloração. Este problema trabalha com planejamento de exames finais:

Problema 2.3.2. A tabela abaixo mostra a distribuição de alunos do 1º ano do ensino médio nos exames finais que eles devem prestar. Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns. Quantos períodos serão necessários para a realização destes exames?

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Física						X	X			X					X	
Química				X	X		X		X				X			
Biologia			X							X		X		X		X
Geografia			X		X								X			
História		X						X	X		X			X		
Inglês		X				X										

Solução: Vamos construir um grafo com os vértices $\{M, P, F, Q, B, H, G, I\}$, dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum. Uma coloração dos vértices corresponde a uma divisão em períodos. Poderíamos usar 16 cores, uma para cada aluno, mas isso seria um desperdício de tempo. Como os vértices M, P, B e H formam um K_4 precisamos de pelo menos 4 cores. Conforme mostra a Figura 2.6

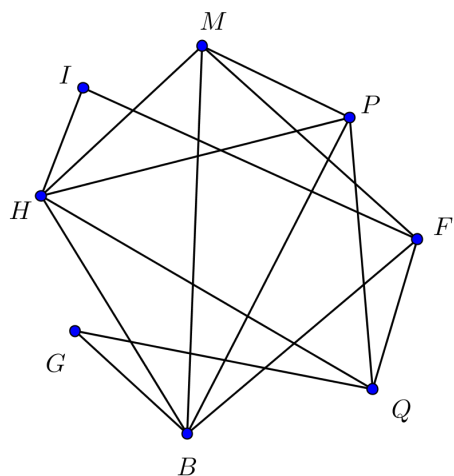


Figura 2.6: Modelagem do problema 2.3.2

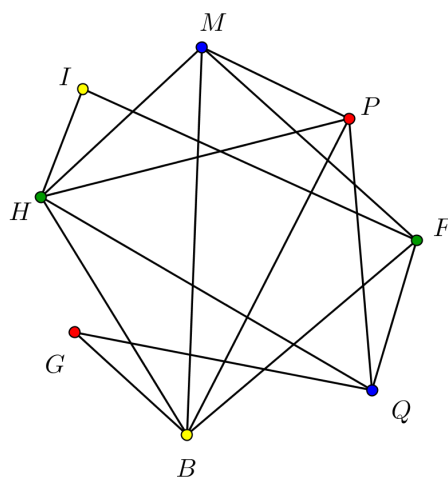


Figura 2.7: Solução do problema 2.3.2

A partição em conjuntos independentes $\{M, Q\}, \{P, G\}, \{B, I\}$ e $\{H, F\}$ mostra que de fato 4 cores (4 períodos) são suficientes para realizar os exames finais desta turma, ver Figura 2.7.

Deixamos como sugestão de atividade o problema seguinte:

Problema 2.3.3. Uma companhia industrial deseja armazenar sete diferentes produtos farmacêuticos C_1, C_2, \dots, C_7 , mas alguns não podem ser armazenados juntos por motivos de segurança. A tabela seguinte mostra os produtos que não podem estar no mesmo local.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
C_1		X				X	X
C_2	X		X	X			
C_3		X		X	X		
C_4		X			X	X	
C_5			X	X		X	X
C_6	X		X	X	X		X
C_7	X				X	X	

Qual o número mínimo de localizações necessárias para colocar estes produtos?

Vale ressaltar que com apenas estas poucas aplicações podemos notar a versatilidade que faz dos grafos um poderoso instrumento para modelagem de situações - problemas concretas, como as do cotidiano do aluno, enfatizando, é claro, a facilidade de contextualização destas situações - problemas.

Dessa forma, a teoria dos grafos, apresentada como desafio, oferece aos alunos a possibilidade de usar sua intuição e elaborar suas próprias estratégias para encontrar a solução de problemas. Do ponto de vista didático, favorece a reformulação do ensino de matemática, abrindo espaço para o processo de descobertas.

Torna-se indiscutível, para o ensino médio, a viabilidade e a oportunidade da abordagem de modelagens em grafos na escola. Justificando-se no fato da natural associação dos grafos com combinatória e pelo forte potencial dos grafos para o exercício da interdisciplinaridade ou transversalidade.

Portanto, a necessidade de que a escola adote novos conteúdos – não implicando a exclusão dos conteúdos existentes – passa a ser fundamental para uma diminuição na dicotomia entre o currículo abordado em sala de aula e a realidade enfrentada pelos alunos em seu dia a dia.

2.4 Roteiro de implementação de grafos na sala de aula

Ao longo deste trabalho é possível perceber como o conceito de grafos é simples. No entanto é um tópico muito rico em aplicações e problemas interessantes que são fáceis de serem contextualizados. Porém, uma pergunta natural surge: como implementar esta teoria em sala de aula? De certo, a resposta a esta pergunta não será fácil. Para responder a aquela questão apresentaremos agora uma proposta de implementação desta teoria em sala de aula.

A metodologia empregada deve se adequar as especificidades de cada turma e deve respeitar as aptidões de cada educador. Para iniciar sua apresentação aos estudantes sugerimos que este tema seja abordado na forma de problemas desafiadores ao final de cada unidade. Note que um mesmo problema pode ser apresentado várias vezes mas com ênfase distinta de acordo com a série em que estamos lecionando.

Na 1ª série do ensino médio podemos iniciar o estudo de grafos com o problema 2.1.1. Ele deve ser abordado ao final do conteúdo funções quadráticas, pois este desafio um problema de minimização, muito diferente dos que ele acabou de estudar com conteúdo antes citado. Este pode ser o primeiro momento para se falar em algoritmo, destacando sua presença e importância no cotidiano e na tecnologia a qual eles tem acesso. Para tanto, é bom lembrar da preparação que o professor deve ter para que o aluno sinta segurança e confiança nos seus ensinamentos. Dando continuidade, este mesmo problema pode ser retomado ao final do conteúdo funções exponenciais. O professor deve mostrar que a dificuldade de se usar o método da exaustão cresce exponencialmente a medida que o número de cidades aumenta.

Na 2ª série consideramos como momento ideal para aprofundarmos nos conceitos que envolvem grafos, pela natural associação com o ensino da análise combinatória. Observe que mais uma vez podemos utilizar o problema 2.1.1, agora podemos enfatizar a aplicação das permutações na construção dos ciclos hamiltonianos. Ainda na 2ª série, durante o conteúdo de geometria espacial pode ser feito um resgate histórico do problema do caixeiro viajante, enfatizando agora a planificação do dodecaedro. Note que até este momento nenhuma formalização do conteúdo grafos foi feita. Acreditamos que o momento certo para isto seria após apresentação do conteúdo poliedros e a relação de Euler que envolve o número de faces, arestas e vértices. Neste instante, temos a História da matemática como importante aliada, primeiramente sugerindo a

biografia deste matemático tão importante e sua enorme contribuição para o surgimento da teoria dos grafos. Sendo assim, podemos agora abordar o famoso problema das pontes de Königsberg, desenvolver a teoria dos grafos com formalismo e apresentar outras situações que podem ser modeladas por grafos, incluindo os outros problemas citados neste capítulo.

Na 3^a série, depois de tudo que foi visto nos anos anteriores podemos agora nos aprofundar mais em grafos e sugerir situações que podem ser modeladas através de grafos bipartidos. Chegou a hora de falarmos de emparelhamento e suas inúmeras aplicações no nosso cotidiano. Este é um tema que pode ser desenvolvido com os estudantes em uma feira de conhecimentos e constitui o foco principal deste trabalho. Detalharemos este tópico no próximo capítulo.

Capítulo 3

Emparelhamentos

Neste capítulo trataremos das principais noções de emparelhamento com teoremas e demonstrações. Além disso, abordaremos situações práticas que podem ser resolvidas através da teoria do emparelhamento.

3.1 Histórico sobre emparelhamento

No nosso dia a dia existem muitas situações que podem ser representadas por um conjunto de pontos e linhas que ligam aos pares esses pontos. Por exemplo, os pontos poderiam representar cidades e as linhas as estradas entre pares destas cidades; ou os pontos poderiam representar pessoas e as linhas a ligação entre pares de pessoas que se conhecem. Ou ainda, outro exemplo, suponhamos que existem n candidatos para preencher m vagas distintas numa empresa, mas nem todos têm as competências necessárias para desempenhar qualquer uma das vagas. Esta situação pode ser representada por um grafo bipartido, onde cada aresta liga um candidato a uma vaga que poderia eventualmente ocupar. A questão agora é a seguinte: é possível empregar cada candidato de tal maneira que cada um ocupe uma das vagas disponíveis, de acordo com as suas capacidades? Em teoria de grafos isso é um problema de emparelhamento de um subconjunto de vértices noutro subconjunto de vértices. Em outras palavras, um emparelhamento é um subconjunto de arestas onde não existe duas arestas incidentes a um mesmo vértice.

Segundo [5] emparelhamento é um tópico clássico de teoria dos grafos, que nos últimos cem anos, tem um papel catalítico no desenvolvimento de vários dos novos e mais gerais métodos combinatórios.

As duas pessoas que são consideradas as principais fundadoras da teoria dos emparelhamentos são Julius Petersen e Denes König. Costuma-se associar Petersen ao estudo de grafos regulares, e König ao estudo de grafos bipartidos.

Em 1891, Petersen reformulou um problema de fatoração algébrica, devido a Hilbert, como um problema de fatoração de grafos. De forma geral, ele estudou o problema de decidir quais grafos regulares têm uma fatoração não trivial em subgrafos geradores regulares menores. Em seguida, ele provou que qualquer grafo regular de grau par pode ser expresso como uma união de circuitos disjuntos nos vértices. Este resultado está bastante relacionado ao famoso resultado de Euler sobre o problema das pontes de Königsberg (1736). Euler mostrou que é possível passar por todas as arestas de um grafo uma única vez e voltar ao vértice de início se, e somente se, o grafo for conexo e todos os vértices tiverem grau par.

Petersen observou que a fatoração de grafos regulares de grau ímpar é um problema muito mais difícil. Ele provou que qualquer grafo conexo 3-regular com não mais do que duas pontes tem um emparelhamento perfeito, ou seja, pode ser decomposta. Além disso, provou que duas pontes é o melhor possível, apresentando um grafo 3-regular com três pontes e que não possui emparelhamento perfeito. Petersen atribuiu este grafo a Sylvester, ver Figura 3.2.

Petersen também estudou a famosa conjectura das quatro cores. Em 1898, provou que a afirmação de Tait, de que se um grafo cúbico fosse poliedral, então poderia ser fatorado em três emparelhamentos perfeitos, estava errada. Para isso mostrou um grafo não-planar que é cúbico e não tem pontes, mas que não podia ser decomposto em três emparelhamentos perfeitos disjuntos. Este grafo, conhecido como grafo de Petersen, Figura 3.1, tem grande importância em teoria dos grafos e serve como contra-exemplo para várias conjecturas, ver [5].

Em 1931, König provou um dos mais importantes resultados em teoria dos emparelhamentos, relacionando o tamanho de um emparelhamento máximo ao tamanho de uma cobertura mínima por vértice. Tal resultado ficou conhecido como teorema min-max de König. No mesmo ano, Egervary generalizou esse resultado para grafos com pesos não negativos nas arestas.

A importância de relações min-max vem aumentando em vários ramos da combinatória, devido principalmente ao aumento do uso de programação linear para formular e resolver muitos problemas combinatórios. Relações min-max também são frequentemente usadas como critério de parada e certificado de correção de vários algoritmos.

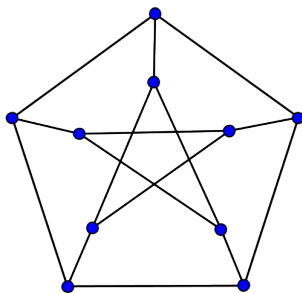


Figura 3.1: Grafo de Petersen

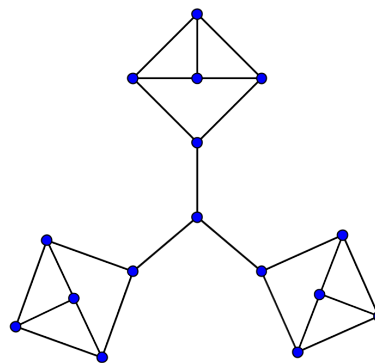


Figura 3.2: Grafo de Sylvester

König também mostrou que o teorema de Menger sobre conectividade, o teorema dos casamentos de Frobenius e o teorema dos representantes distintos de Hall são consequências de seu teorema min-max. Na verdade esses quatro resultados são equivalentes. Com relação a emparelhamentos em grafos arbitrários (não necessariamente bipartido), considera-se que os pioneiros são Tutte e Edmonds. Em 1947, Tutte apresentou uma caracterização para grafos arbitrários que contém emparelhamentos perfeitos. Berge, em 1958, derivou, dessa caracterização, uma relação min-max, conhecida como fórmula de Tutte-Berge, para o número máximo de arestas em um emparelhamento máximo.

3.2 Definições básicas

Nesta secção, serão apresentados alguns conceitos, teoremas e demonstrações subjacentes a teoria do emparelhamento, que são extremamente importantes para o entendimento deste trabalho.

Definição 3.2.1. Um grafo é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos X e Y , tais que toda aresta de G une um vértice de X a outro de Y .

Uma caracterização muito importante para grafos bipartidos é dada pelo próximo teorema.

Teorema 3.2.2. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja G bipartido. Se não houver ciclo em G , não há o que mostrar. Se há um ciclo em G este alterna vértices de X e Y , dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de X (por exemplo), para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

(\Leftarrow) Podemos considerar apenas grafos conexos. Seja G um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos X e Y , independentes e disjuntos. Consideramos primeiramente um vértice qualquer v . O subconjunto X será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w . O subconjunto Y será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w . Os conjuntos X e Y são disjuntos, pois se w estivesse em X e Y ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a w . Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w , produzindo alguns ciclos (veja a Figura 3.3). Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G , contrariando a hipótese. \square

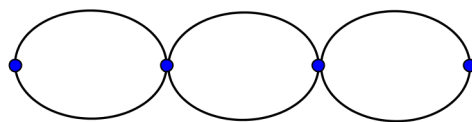


Figura 3.3: Cruzamento de dois caminhos

A noção de grafo completo também pode ser estendida aos grafos bipartidos.

Definição 3.2.3. Um grafo bipartido $G = (V, E, I)$ com os conjuntos partição X e Y é chamado *grafo bipartido completo* se todas as possíveis conexões de vértices de X com os vértices de Y pertencem a E , isto é,

$$E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Denotamos este tipo de grafo por $K_{p,q}$, onde p e q denotam a cardinalidade dos conjuntos X e Y .

Nas Figuras 3.4 e 3.5 temos dois exemplos de grafos bipartidos.

A definição formal de emparelhamento é dada por:

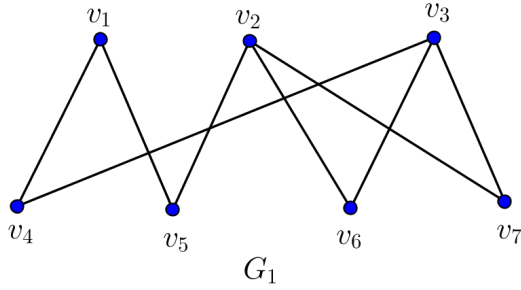


Figura 3.4: Grafo bipartido

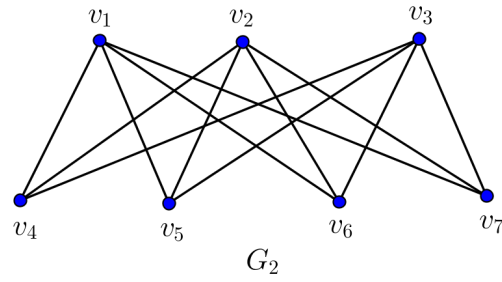


Figura 3.5: Grafo bipartido completo $K_{3,4}$

Definição 3.2.4. Seja $G = (V, E, I)$ um grafo, um *emparelhamento* é um conjunto $M \subseteq E$ tal que, para todos $e_1, e_2 \in M$, $e_1 \cap e_2 = \emptyset$

Para ilustrar o emparelhamento considere o grafo G_1 apresentado na Figura 3.4. Nas Figura 3.6 temos dois exemplos de emparelhamentos M_1 e M_2 para G_1 .

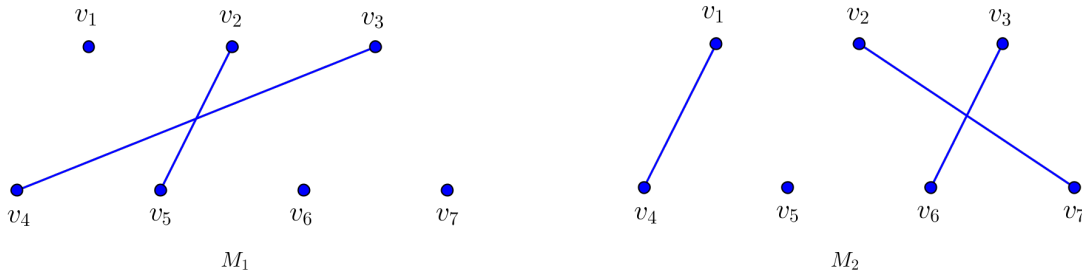


Figura 3.6: Exemplos de emparelhamentos

Num grafo $G = (V, E, I)$ com emparelhamento $M \subseteq E$, dizemos que os vértices extremos de um aresta $e \in M$ estão *emparelhados* por M ou simplesmente M – *emparelhados*. Um emparelhamento M satura um vértice v e v é dito M – *saturado* se existe $e \in M$ incidente a v ; caso contrário, v é *não M -saturado* ou *livre*.

São observações que seguem facilmente da definição de emparelhamento:

- \emptyset define um emparelhamento.
- se $M' \subseteq M$ e M é um emparelhamento, então M' também define um emparelhamento.

Um emparelhamento M é dito *máximo* em G se M contém o maior número possível de arestas, isto é, G não admite emparelhamento M' com $|M'| > |M|$. Dizemos também que M é emparelhamento de *cardinalidade máxima*, neste caso. Um emparelhamento M é *maximal* em G se qualquer acréscimo de aresta a M faz com que M deixe de ser um emparelhamento. Ou seja, não existe nesse grafo G um emparelhamento M' que contém M propriamente (isto é, tal que $M' \supset M$).

Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal. Para ilustrar o que foi dito basta observar os emparelhamentos M_1 e M_2 da Figura 3.6, temos que M_1 é maximal enquanto M_2 é máximo.

Um emparelhamento é *perfeito*, se cada vértice $v \in V$ é incidente a alguma aresta de M . Observe que todo emparelhamento perfeito é máximo, e que num grafo $G = (V, E, I)$ com emparelhamento perfeito há $|V|/2$ arestas. Num emparelhamento perfeito M , todo vértice encontra-se M -saturado.

Exemplos de emparelhamento maximal e perfeito no prisma pentagonal estão indicados nas Figuras 3.7 e 3.8 respectivamente.

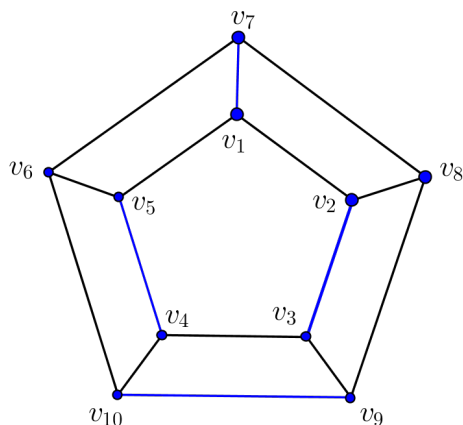


Figura 3.7: Emparelhamento maximal

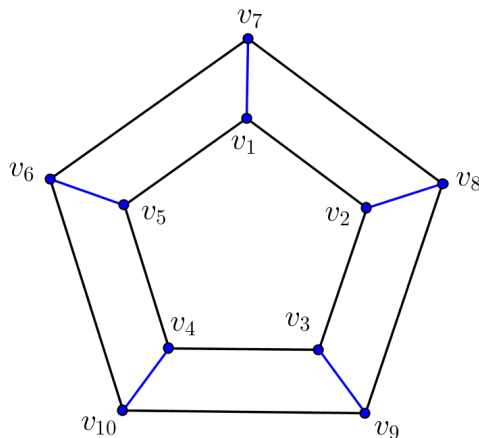


Figura 3.8: Emparelhamento perfeito

O conceito de emparelhamento tem múltiplas aplicações como no caso a seguir.

Exemplo 3.2.5. Suponha que no grafo G a seguir V representa um conjunto de trabalhadores {João, Carlos, Maria} e U um conjunto de habilidades ou profissões {motorista, recepcionista, porteiro, digitador}. Uma aresta liga um trabalhador a

todas as profissões a que ele está habilitado. O problema então é dar empregos ao máximo número de pessoas respeitando suas habilidades.

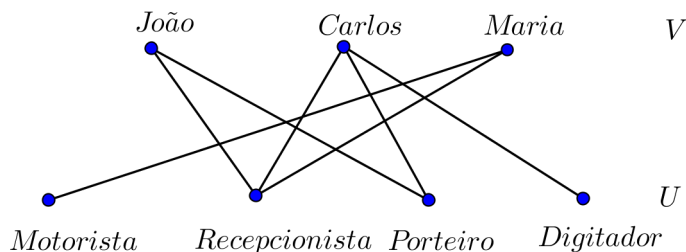


Figura 3.9: Grafo G que modela o exemplo 3.2.5

Solução: Para o grafo acima, uma solução seria:

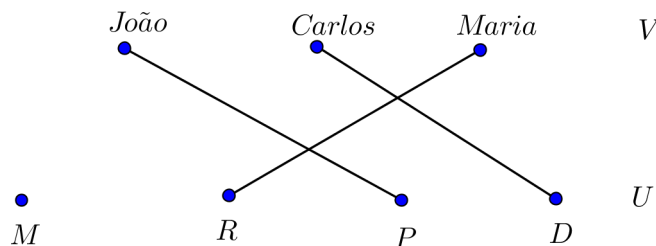


Figura 3.10: Solução do exemplo 3.2.5

$M = \{(João,P),(Carlos,D),(Maria,R)\}$ que é um emparelhamento máximo.

Em geral o problema a ser resolvido é a busca do emparelhamento máximo de um grafo. Para a solução deste problema vamos introduzir os seguintes conceitos.

Definição 3.2.6. Um *caminho alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem, isto é, um caminho tal que as arestas de P estão alternadamente em $E \setminus M$ e M .

Exemplo 3.2.7. Considere um grafo G e um emparelhamento M representados na Figura 3.11. Temos que $P = v_1u_1v_2u_2$ é um caminho alternante para M .

Definição 3.2.8. Se um caminho alternante tem início e fim não saturado então chamamo-lo de *caminho aumentante*.



Figura 3.11: Grafo G e emparelhamento M referentes ao exemplo 3.2.7

Note que o caminho $P = v_1u_1v_2u_2$ do exemplo 3.2.7 é também um caminho aumentante.

Sempre que existir um caminho aumentante, o emparelhamento M não será máximo em G . O contrário também é verdadeiro, resultando no seguinte teorema.

Teorema 3.2.9. (Teorema de Berge) *Um emparelhamento M de um grafo G é máximo se e só se não existe em G um caminho M -aumentante.*

Demonstração. Seja M um emparelhamento em G . Suponha que G possui um caminho M -aumentante P . Observe que P tem, por definição, um número par de vértices, digamos $P = v_0v_1 \cdots v_{2m+1}$. Defina $M' \subseteq E$ por

$$M' = (M \setminus \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2m-1}v_{2m}\}) \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2m}v_{2m+1}\}$$

Temos que M' é um emparelhamento em G com $|M'| = |M| + 1$ e portanto M não tem cardinalidade máxima em G . Logo, se G possui caminho M -aumentante, então M não tem cardinalidade máxima.

Por outro lado, suponha que M não tem cardinalidade máxima em G . Seja M' um emparelhamento de cardinalidade máxima em G . Logo $|M'| > |M|$. Denote por $M \Delta M'$ a *diferença simétrica* de M e M' , isto é, o conjunto das arestas que estão em $M \cup M'$ mas não estão em $M \cap M'$. Seja $H = G[M \Delta M']$. Cada vértice em H tem grau 1 ou 2, já que pode ser incidente a no máximo uma aresta de M e a uma aresta de M' . Logo cada componente conexa de H é um ciclo par com arestas alternadamente em M e M' ou um caminho com arestas alternadamente em M e M' . Mas H tem mais arestas de M' do que de M e portanto alguma componente que é um caminho Q em H deve começar e terminar com arestas de M' . Como a origem e o término de Q são M' -saturados em H , segue que são vértices não M -saturados em G . Logo Q é

o caminho M -aumentante procurado. Portanto, se M não tem cardinalidade máxima em G , então G possui caminho M -aumentante. \square

Note que o teorema de Berge fornece um algoritmo para obter um emparelhamento máximo. A ideia é procurar caminhos aumentantes, a partir de vértices livres. A operação de construção do novo emparelhamento pode ser expresso como a diferença simétrica entre o emparelhamento anterior e o caminho aumentante P .

Em cada iteração é feita uma busca, a partir dos vértices livres que não estão emparelhados por M , à procura de um caminho aumentante. Se tal caminho P for encontrado, pelo Teorema de Berge sabemos que M não é o emparelhamento máximo. Nesse caso, substitui-se M por $M \Delta P$ e vamos procurar, se existir, um outro caminho a partir do novo emparelhamento. Quando consideramos um novo emparelhamento, aumentamos o número de arestas do emparelhamento, portanto, o número de vértices livres de X e Y diminui. A busca pode terminar por dois motivos : ou não existem vértices livres em X ou não encontramos vértices livres em Y . Em ambos os casos, não existem mais caminhos aumentantes. Portanto, pelo Teorema de Berge, o último emparelhamento obtido é máximo.

O processo de determinação de um caminho aumentante, corresponde à construção de uma árvore de pesquisa, ou seja, de uma árvore alternante cuja raiz é um vértice livre de X , onde são integrados sucessivamente vértices, que são por sua vez analisados, até se encontrar um vértice livre de Y .

As primeiras ideias de como encontrar emparelhamentos máximos, surgiram no trabalhos de König e Egervary em 1930, mas estavam restritas a grafos bipartidos. No entanto, o primeiro algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos foi apresentado por Kuhn em 1956. Kuhn classificou os algoritmos baseados nas ideias de König e Egervary, como o dele, de método húngaro.

Para grafos arbitrários, o primeiro algoritmo polinomial só apareceu em 1965 e foi encontrado por Edmonds. Tal algoritmo motivou Edmonds a sugerir uma forma melhor de medir eficiência de algoritmos, como por exemplo tempo polinomial, e isso foi uma grande contribuição para teoria da computação.

Convém ressaltar que o conceito de emparelhamento vale para todo tipo de grafo, não somente para os grafos bipartidos. No entanto, neste trabalho limitaremos o nosso estudo a sua aplicação a grafos bipartidos.

Acompanhe agora uma situação muito comum do cotidiano da escola que envolve emparelhamentos máximos:

Exemplo 3.2.10. Sergipe é considerado o país do forró. Pensando nisto, um grupo de alunos do 1º ano do ensino médio decidiu formar uma quadrilha para se apresentar na escola durante os festejos juninos. No entanto, como é típico da adolescência, as meninas deste grupo não tem afinidades com todos os meninos. A figura abaixo é o grafo que representa o conjuntos das meninas e dos meninos, bem como as afinidades entre eles. Pergunta-se: qual é o número máximo de casais que é possível formar com estes alunos respeitando as relações de amizades que existem entre eles?

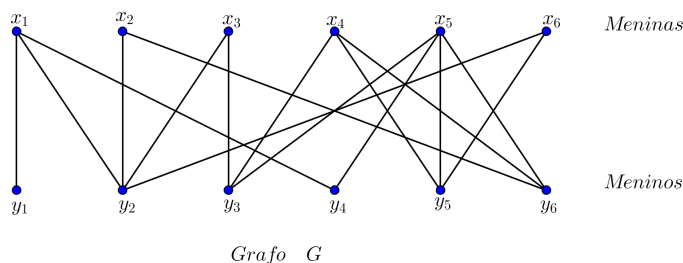


Figura 3.12: Grafo G que modela o problema 3.2.10

Solução: Para resolver este problema tomaremos inicialmente o emparelhamento M representado na Figura 3.13.

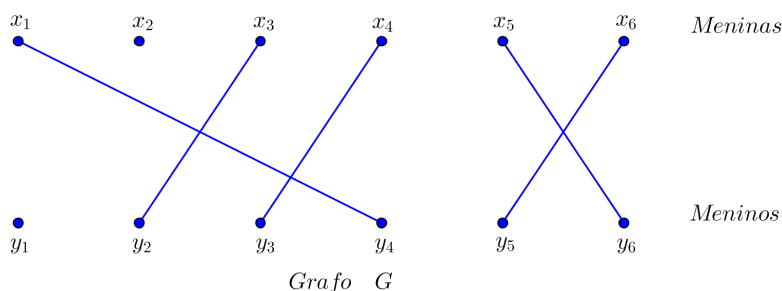


Figura 3.13: Emparelhamento M

A pesquisa do caminho aumentante P deve começar pela construção de caminhos alternantes cujo vértice inicial seja um vértice livre. Dado que um caminho aumentante deve ter um vértice extremo em X e outro em Y . Sendo assim, começaremos com o vértice livre x_2 e pesquisam-se simultaneamente todos os caminhos alternantes possíveis. Consideram-se todos os vértices adjacentes a x_2 , precisamente y_2 e y_6 . Visto que x_2 é um vértice livre, todas as arestas adjacentes são livres.

Pela definição de caminho alternante, agora é necessário observar as arestas emparelhadas provenientes de y_2 e y_6 . Este passo é simples, uma vez que todos os vértices têm no máximo um par. Naturalmente, se y_2 ou y_6 fossem livres, a tarefa estaria concluída: ter-se-ia encontrado um caminho aumentante. Contudo, esse não é o caso. Então adicionam-se os vértices x_3 e x_5 ao conjunto dos caminhos alternantes, porque correspondem aos pares de y_2 e y_6 . Através desta construção x_3 e x_5 são vértices exteriores. Continua-se a construção dos caminhos alternantes através de x_3 e x_5 . Note que o vértice y_3 pode ser alcançado por x_3 ou x_5 . Assume-se que y_3 é atingido primeiramente por x_3 e portanto a aresta (x_5, y_3) é omitida. Obviamente que, ao fazer este raciocínio estamos perdendo caminhos aumentantes redundantes. Assim, descobrem-se novos vértices exteriores, precisamente x_4 através do vértice y_3 , x_1 através do vértice y_4 (sendo y_4 alcançado através de x_5) e x_6 através de y_5 (sendo y_5 alcançado por x_5). Finalmente nota-se que o vértice exterior x_1 é adjacente ao vértice livre y_1 . Sendo assim, descobrimos o caminho aumentante P , e através deste aumenta-se o emparelhamento M .

O processo de construção do caminho aumentante e o emparelhamento M obtido pode ser observado na Figura 3.14. Através desta figura podemos mostrar que é possível formar uma quadrilha com 6 casais. Neste problema obtivemos um emparelhamento máximo.

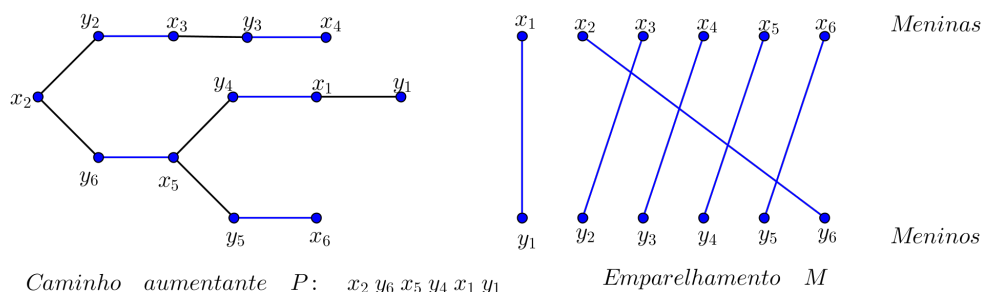


Figura 3.14: Construção do caminho aumentante P e o emparelhamento M obtido

Para um grafo bipartido o problema do emparelhamento máximo se apresenta como a busca de um emparelhamento que sature o conjunto X . Neste caso, o denominamos de *emparelhamento completo*.

Existem alguns resultados teóricos interessantes para o caso de emparelhamentos em grafos bipartidos.

Um importante resultado da teoria de emparelhamentos é o Teorema de Hall, que fornece condições para a existência de um emparelhamento que cobre todos os vértices de X em um grafo bipartido com partição (X, Y) , ou seja, para a existência de um emparelhamento M onde, para cada vértice v de X , existe uma aresta em M que incide em v . Basicamente, a existência de tal emparelhamento é possível se, e somente se, todo subconjunto de X com k vértices possui no mínimo k vizinhos, para todos os valores possíveis de k . Este teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 3.2.11. (Teorema de Hall). *Seja G um grafo bipartido com partição (X, Y) . Existe um emparelhamento que satura todos os vértices de X se e somente se,*

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{para todo } S \subseteq X$$

Demonstração. Suponha que G contém um emparelhamento M que satura todos os vértices de X , e seja $S \subseteq X$. Como os vértices de S estão emparelhados por M com vértices distintos de $N(S)$, temos que $|N(S)| \geq |S|$.

Reciprocamente, suponha que G seja bipartido tal que $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$. Seja M' um emparelhamento máximo em G . Por hipótese, M' não satura todo vértice de X . Seja u um vértice de X que não está M' -saturado em X e seja Z o conjunto dos vértices ligados a u por um caminho M' -alternante. Como M' é máximo, u deve ser o único vértice de Z não M' -saturado. Defina $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Os vértices em $S \setminus \{u\}$ estão emparelhados por M' com os de T . Portanto, $|T| = |S| - 1$ e $N(S) \supseteq T$. Na verdade, temos $N(S) = T$ uma vez que cada vértice em $N(S)$ está conectado a u por um caminho M' -alternante. Portanto, $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$, o que contradiz a hipótese.

□

Desde que foi demonstrado em 1935, esse teorema tem se mostrado bastante útil e é muito estudado até os dias de hoje.

Os próximos resultados são consequências imediatas do Teorema 3.2.11.

Corolário 3.2.12. *Seja G um grafo bipartido com bipartição X, Y . Então G admite emparelhamento perfeito se e somente se $|X| = |Y|$ e $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.*

Corolário 3.2.13. *Se G é um grafo bipartido k -regular, com $k > 0$, então G tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja (X, Y) a bipartição de V . Como G é k -regular, $|X| = |Y|$. Seja $S \subseteq X$. Então $k|S| \leq k|N(S)|$, ou seja, $|N(S)| \geq |S|$ e, pelo teorema de Hall, G tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de X . Como $|X| = |Y|$, este emparelhamento é perfeito. \square

Uma outra prova para este corolário encontra-se em [3, Corollary 5.2]. Segundo [3], este corolário é conhecido como o *teorema dos casamentos*, e pode ser interpretado da seguinte forma: se cada garota de uma aldeia conhece exatamente k garotos e cada garoto desta aldeia conhece exatamente k garotas, então cada garota pode se casar com um garoto que ela conhece, e cada garoto pode se casar com uma garota que ele conhece.

Note que o teorema de Hall apenas caracteriza se um grafo bipartido possui ou não um emparelhamento completo. Apresentaremos agora uma forma de se encontrar, para qualquer grafo bipartido, emparelhamentos completos ou provar que estes não existem.

Uma forma de encontrar o emparelhamento completo é utilizando o algoritmo Húngaro. Este algoritmo baseia-se num resultado de Berge de 1957 que caracteriza os emparelhamentos com um número máximo de arestas de um grafo G , ditos emparelhamentos máximos, usando a noção de caminho M -aumentante. Este algoritmo encontra um emparelhamento completo, ou então encontra um subconjunto $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$, o que mostra que este emparelhamento não existe.

A ideia básica do algoritmo é simples. Começamos com um emparelhamento arbitrário M . Se M cobre todos os vértices de X , então M é perfeito. Senão, escolhemos um vértice $u \in X$ não coberto por M e, sistematicamente, tentamos encontrar um caminho M -aumentante com origem em u . Se o tal caminho não existe, então seja Z o conjunto de todos os vértices ligados a u por um caminho M -alternante. Então $S = Z \cap X$ é tal que $|N(S)| < |S|$. Caso contrário (existe o caminho M -aumentante, então, pelo Teorema 3.2.11, existe um emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$). Neste caso trocamos M por M' e repetimos o processo.

Este método é conhecido como *Método Húngaro* e pode ser descrito mais detalhadamente da seguinte forma:

1. Encontre um emparelhamento M qualquer.
2. Se M satura X , então pare. Senão, seja $u \in X$ um vértice não saturado por M . Faça $S = u$ e $T = \emptyset$.

3. Se $N(S) = T$, então $|N(S)| < |S|$, pois $|T| = |S| - 1$. Neste caso pare, pois pelo teorema de Hall (Teorema 3.2.11), não existe emparelhamento que sature todos os vértices de X . Caso contrário, seja $y \in N(S) - T$.
4. Se y é coberto por M , então seja (y, z) a aresta de M que incide em y . Faça $S = S \cup \{z\}$ e $T = T \cup \{y\}$ e vá para o passo 3. Observe que $|T| = |S| - 1$ está mantido após essas atribuições. Se y não está saturado por M , então seja P um caminho aumentante de u a y . Troque M por $M' = M \triangle E(P)$ e vá para o passo 2.

Na próxima seção veremos como este algoritmo e o teorema 3.2.11 pode ser utilizado em situações do cotidiano.

3.3 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas situações que podem ser modeladas por um grafo bipartido e solucionadas através da teoria do emparelhamento vista na seção anterior. É importante destacar a variedade de problemas interessantes que podemos criar com enunciados bastante simples e possíveis de serem aplicados em sala de aula ou em uma feira de ciências. Algumas situações aparecem com desafios como o problema que exibiremos a seguir.

Problema 3.3.1. Considere um tabuleiro 8×8 de onde foram removidos dois cantos opostos de tamanho 1×1 . É possível, usando retângulos 1×2 , cobrir exatamente este tabuleiro?

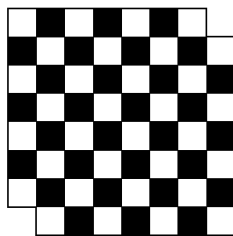


Figura 3.15: Tabuleiro de xadrez com dois cantos opostos removidos

Solução: Podemos pensar nestas casas do tabuleiro como dois conjuntos disjuntos, X , o conjunto das casas brancas e Y como o conjunto das casas pretas. Neste problema estamos buscando um emparelhamento perfeito, ou seja, que satura todas as

casas deste tabuleiro. Note que, não importa como colocamos o retângulo 1×2 no tabuleiro, ele sempre cobre uma casa branca e outra preta. Desse modo se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas retângulos 1×2 , deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas pretas igual a quantidade de casas brancas. Mas no tabuleiro onde foram removidos dois cantos opostos existem 18 casas brancas e 16 pretas. Logo, pelo corolário 3.2.12 temos que esta cobertura é impossível.

Problema 3.3.2. Um treinador tem 6 alunos disponíveis para formar um time de futsal. Além do goleiro, é necessário preencher as posições de ala direita (AD), ala esquerda (AE), fixo (F) e pivô (P). Cada aluno tem habilidades que lhe permitem jogar, pelo menos, numa posição, de acordo com o grafo apresentado na Figura 3.16. Pergunta-se: será possível, com estes alunos, preencher todas as posições e formar uma equipe?

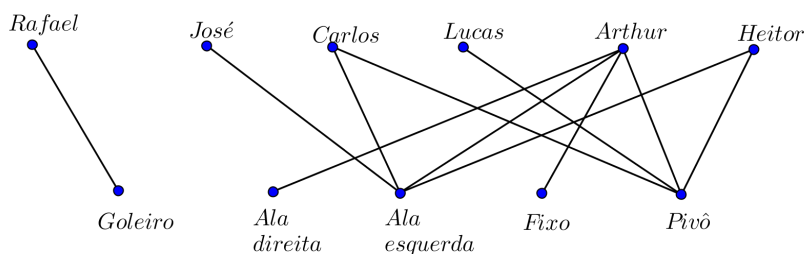


Figura 3.16: Grafo que modela o problema 3.3.2

Solução: Neste caso não é possível, pois o aluno Arthur é o único capaz de jogar nas posições de ala direita e fixo. No entanto, ele não pode jogar nestas duas posições simultaneamente.

Do ponto de vista da teoria dos grafos, queremos saber se existe um emparelhamento completo. Seja $G = (V, E)$, onde $V = X \cup Y$, $X = \{AD, AE, F, P, G\}$ representa o conjunto das posições e $Y = \{Rafael, José, Carlos, Lucas, Arthur, Heitor\}$ representa o conjunto dos alunos. Note que existe um conjunto $S = \{AD, F\}$ de cardinalidade 2, cujo vértice adjacente é Arthur, isto é, $N(S) = \{Arthur\}$, sendo $|N(S)| = 1$. Neste exemplo, $|S| > |N(S)|$. Logo, segundo o teorema 3.2.11 conclui-se de imediato que não existe emparelhamento completo.

Problema 3.3.3. Considere o grafo G , dado na Figura 3.17 que representa 5 candidatos que pretendem preencher 5 vagas disponíveis. As arestas deste grafo representam

as habilidades dos candidatos para as vagas disponíveis. Pergunta-se: será possível preencher todas as vagas respeitando as competências de cada candidato?

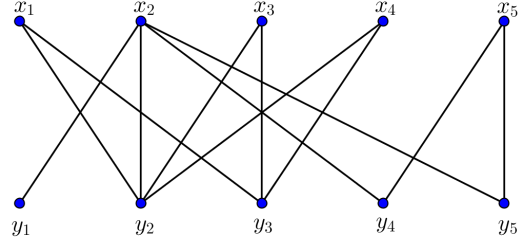


Figura 3.17: Grafo que modela o problema 3.3.3

Solução: Seja $G = (V, E)$, onde $V = X \cup Y$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ representa o conjunto dos candidatos e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ representa o conjunto das vagas disponíveis.

Começamos com o emparelhamento $M = \{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$. Construiremos a árvore alternante H a partir de um vértice livre; vai-se então construir a árvore com raiz em x_1 . Inicializamos $S = \{x_1\}$ e $T = \emptyset$. Seja $y_2 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_2x_2 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_2\}$ e $T = \{y_2\}$. Em seguida, seja $y_3 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_3x_3 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $T = \{y_2, y_3\}$. Seja $y_1 \in N(S) \setminus T$. Como y_1 não é M -saturado, temos o caminho aumentante $P = x_1y_2x_2y_1$ na árvore aumentante H .

Temos o emparelhamento aumentado de uma unidade para :

$$M' = \{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}.$$

Construímos a árvore alternante H' a partir do vértice x_4 da seguinte forma: inicializamos $S = \{x_4\}$ e $T = \emptyset$. Seja $y_2 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_2x_1 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_4\}$ e $T = \{y_2\}$. Seja $y_3 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_3x_3 \in M$, temos $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ e $T = \{y_2, y_3\}$. Como $N(S) = T$, o teorema de Hall afirma que não há emparelhamento que sature todos os vértices de X .

Neste caso, o algoritmo húngaro terminou com um emparelhamento máximo.

Portanto, apenas 4 vagas serão preenchidas e infelizmente um candidato não será contratado.

Todo o processo acima descrito pode ser representado pela Figura 3.18.

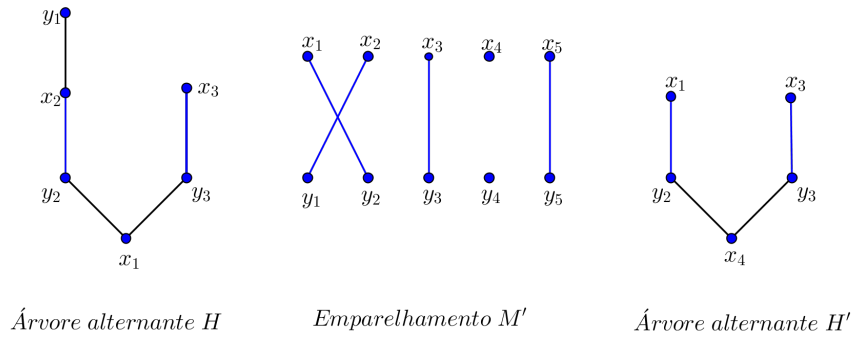


Figura 3.18: Processo que descreve a execução do algoritmo húngaro

Problema 3.3.4. Suponha que uma empresa farmacêutica pretende testar 5 antibióticos em 5 voluntários. No entanto, análises mostram que alguns candidatos têm alergia a algumas das drogas dos antibióticos. Na Figura 3.19 encontra-se a disposição dos voluntários, antibióticos e a relação de alergia que existe entre cada voluntário e os antibióticos. Será possível maximizar a quantia de antibióticos testados, sendo que cada candidato pode testar ao máximo um dos antibióticos para que ele não seja alérgico e cada antibiótico pode ser tomado por apenas um candidato?

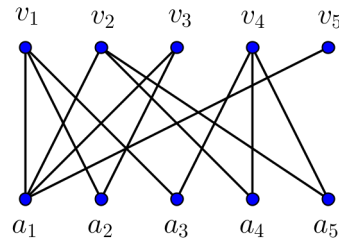


Figura 3.19: Grafo que modela o problema 3.3.4

Solução: Usando a teoria dos grafos, podemos modelar este problema para que corresponda a achar um emparelhamento perfeito num grafo. Seja $G = (V, E)$, onde $V = X \cup Y$, $X = \{v_1, v_1, v_3, v_4, v_5\}$ representa o conjunto dos voluntários e $Y = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ representa o conjuntos dos antibióticos a serem testados. Iremos agora aplicar o algoritmo húngaro com o objetivo de mostrar se é possível ou não

testar todos os antibióticos. Além disso, ao final exibiremos uma forma de como estes testes podem ser organizados.

Começamos com o emparelhamento $M = \{v_1a_1, v_2a_4, v_3a_2\}$. Construímos a árvore alternante H a partir do vértice livre v_4 . Inicializamos $S = \{v_4\}$ e $T = \emptyset$. Seja $a_3 \in N(S) \setminus T$. Como a_3 não é M -saturado, temos o caminho aumentante $P = v_4a_3$ de comprimento 1 na árvore alternante H , ver Figura 3.20. Substituí-se M por um emparelhamento maior $M' = \{v_1a_1, v_2a_4, v_3a_2, v_4a_3\}$ representado na Figura 3.21.

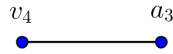


Figura 3.20: Caminho aumentante P

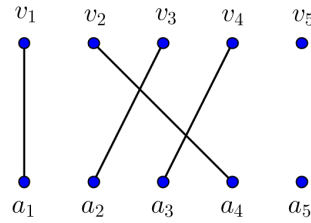


Figura 3.21: Emparelhamento M'

Agora construímos a árvore alternante H a partir do vértice livre v_5 da seguinte forma: inicializamos $S = \{v_5\}$ e $T = \emptyset$. Seja $a_1 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $v_1a_1 \in M$, atualizamos $S = \{v_1, v_5\}$ e $T = \{a_1\}$. Seja $a_3 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $v_4a_3 \in M$, temos $S = \{v_1, v_4, v_5\}$ e $T = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Seja $a_5 \in N(S) \setminus T$. Como a_5 não é M -saturado, temos o caminho aumentante $P = v_5a_1v_1a_3v_4a_5$ na árvore alternante H , ver Figura 3.22. Substituí-se M' por um emparelhamento maior $M'' = \{v_1a_3, v_2a_4, v_3a_2, v_4a_5, v_5a_1\}$. Este novo emparelhamento está representado na Figura 3.23.

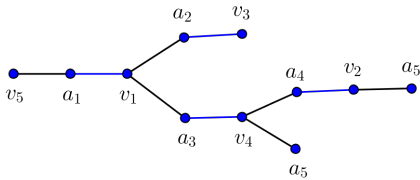


Figura 3.22: Crescimento da árvore H

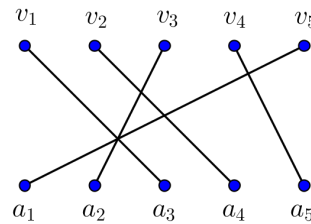


Figura 3.23: Emparelhamento M''

O emparelhamento M'' satura todos os vértices de V , o algoritmo para. Logo, M'' um emparelhamento perfeito e portanto, é completo.

Deixaremos como desafio ao leitor solucionar os próximos dois problemas.

Problema 3.3.5. Há vagas abertas em sete divisões diferentes de uma grande empresa: publicidade (P), negócios (N), informática (I), design (D), controle de qualidade (C), finanças (F) e recursos humanos (R). Seis pessoas estão candidatando-se para algumas destas vagas, a saber:

Arthur (A): P, I, F;

Bruno (B): P,N,I,D,C,R;

Esther (E): I,F;

Thaís (T): N,I,D,C,F,R;

Leonardo (L): P, I, F;

Mateus (M): P,F.

É possível contratar todos os seis candidatos para seis divisões diferentes?

Problema 3.3.6. A Figura 3.24 mostra dois grafos bipartidos G_1 e G_2 , cada um com os conjuntos partição $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. Em cada caso, existe algum emparelhamento que sature o conjunto X ?

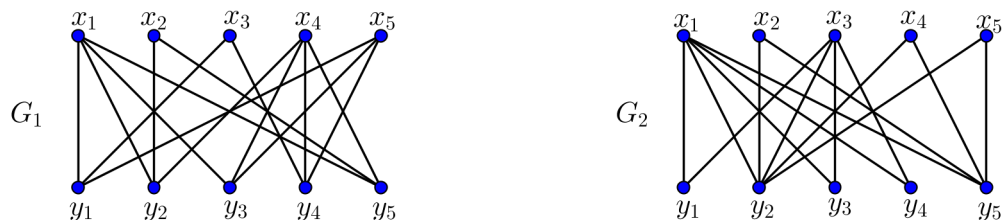


Figura 3.24:

Conclusão

O ensino de teoria dos grafos, especificamente emparelhamentos, mostra a grande abrangência de possibilidades de aplicações dos mesmos. São inúmeras situações do nosso cotidiano que podem ser modeladas através dos grafos bipartidos de forma simples e acessível aos estudantes do ensino médio.

É importante notar como estas aplicações e exemplos contribuem com o poder de encantamento da matemática sobre nossos alunos, sobretudo naqueles que não possuem grandes afinidades com a mesma. Ao mesmo tempo, contribui para a articulação da matemática estudada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia.

Através do ensino de emparelhamento criamos oportunidades de tornar o ensino de matemática experimental, no qual o aluno deixa de ser coadjuvante pois o raciocínio matemático é muito valorizado e sua criatividade é testada a todo momento. Note que ele deixa de ser um sujeito passivo na construção do conhecimento, o que pode acarretar numa melhor formação do cidadão, que é um dos principais objetivos da escola.

Note que ao trabalhar com emparelhamentos um assunto pouco ou totalmente desconhecido pelos estudantes surge a todo momento, algoritmos. No entanto, se dermos conta em nosso cotidiano, movimentamo-nos muito de forma algorítmica. Sendo assim, podemos mostrar aos alunos como a matemática está presente em tudo que fazemos. Dessa forma, podemos concluir que trabalhar com algoritmos também pode contribuir muito no desenvolvimento do raciocínio lógico dos nossos alunos.

Enfim, os grafos se mostram como uma ferramenta poderosa que auxilia a contextualizar problemas de natureza combinatória de forma bastante atrativa aos olhos dos estudantes. Além de serem utilizados na modelagem de problemas também favorecem a inclusão de novas possibilidades de uso das novas tecnologias. Dessa forma, além de contribuir com a transversalidade é possível mostrar aos estudantes a importância na matemática no desenvolvimento tecnológico e científico.

Portanto, podemos mostrar neste trabalho como a matemática é uma ciência dinâmica que permeia várias áreas do conhecimento, diferentemente do que a maioria dos estudantes imaginam.

Fica evidenciado que tornar o ensino da matemática mais significativo para o aluno requer mais preparação do professor. Este deve se sentir desafiado a buscar alternativas no seu fazer pedagógico tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico. Por isso, acreditamos que é necessário que sejam dadas mais oportunidades para o professor se capacitar. E que este veja a pesquisa como uma das suas principais atribuições enquanto educador num mundo contemporâneo. Com isso, espera-se que o mesmo se mantenha atualizado com relação aos conhecimentos produzidos e estudados nas universidades. E possa assim incorporar temas atuais nas suas práticas pedagógicas.

Em suma, se queremos uma educação de qualidade todos os envolvidos devem se mostrar comprometidos com esta causa. Devemos usar as dificuldades encontradas no dia a dia como molas propulsoras que nos incentivam a estudar e pesquisar para que então possamos enfim remover os obstáculos impostos pela vida.

Apêndice

Segundo [11] duas ideias mudaram o mundo. Em 1448, na cidade alemã de Mainz, um ourives chamado Johann Gutenberg descobriu uma maneira de imprimir livros juntando peças metálicas móveis. A alfabetização se espalhou, a Idade Média terminou, o intelecto humano foi liberado, ciência e tecnologia triunfaram, a Revolução Industrial aconteceu. Muitos historiadores dizem que devemos tudo isso à tipografia. Mas outros insistem em que o desenvolvimento-chave não foi a tipografia, mas os algoritmos.



Figura 3.25: Johann Gutenberg 1398 -1468

O sistema decimal, inventado na Índia por volta de 600 d.c., foi uma revolução no raciocínio quantitativo: usando apenas dez símbolos, mesmo números muito grandes podiam ser escritos de maneira compacta, e a aritmética podia ser feita eficientemente sobre eles seguindo passos elementares. Entretanto, essas ideias levaram um longo tempo para serem difundidas, impedidas por barreiras tradicionais de linguagem, distância e ignorância. O meio mais influente de transmissão acabou sendo um livro-texto, escrito em árabe no século IX por um homem que vivia em Bagdá. Al Khwarizmi estabeleceu os métodos básicos para adicionar, multiplicar e dividir números - até mesmo extrair a raiz quadrada e calcular os dígitos de π . Esses procedimentos eram precisos, não ambíguos, mecânicos, eficientes, corretos - em suma,

eram algoritmos, um termo cunhado para homenagear o sábio homem, depois que o sistema decimal foi finalmente adotado na Europa, após muitos séculos.

Desde então, o sistema decimal posicional e seus algoritmos numéricos desempenharam um papel enorme na civilização ocidental. Eles possibilitaram a ciência e a tecnologia se estabelecerem; aceleraram a indústria e o comércio. E quando, muito depois, o computador foi projetado, ele incorporou explicitamente o sistema posicional nos seus bits, palavras e unidade aritmética. Em todo lugar, cientistas se ocuparam em desenvolver algoritmos mais e mais complexos para todo tipo de problema e inventar novas aplicações - por fim, mudando o mundo.

O assunto que se constituiu no marco inicial da teoria de grafos é na realidade um problema algorítmico.

Mas, qual a definição de algoritmo?

Um algoritmo é uma sequência não ambígua de instruções que é executada até que determinada condição se verifique. Mais especificamente, em matemática, constitui o conjunto de processos (e símbolos que os representam) para efetuar um cálculo.

O conceito de algoritmo é frequentemente ilustrado pelo exemplo de uma receita, embora muitos algoritmos sejam mais complexos. Eles podem repetir passos (fazer iterações) ou necessitar de decisões (tais como comparações ou lógica) até que a tarefa seja completada. Um algoritmo corretamente executado não irá resolver um problema se estiver implementado incorretamente ou se não for apropriado ao problema.

Um algoritmo não representa, necessariamente, um programa de computador, e sim os passos necessários para realizar uma tarefa. Sua implementação pode ser feita por um computador, por outro tipo de autômato ou mesmo por um ser humano. Diferentes algoritmos podem realizar a mesma tarefa usando um conjunto diferenciado de instruções em mais ou menos tempo, espaço ou esforço do que outros. Tal diferença pode ser reflexo da complexidade computacional aplicada, que depende de estruturas de dados adequadas ao algoritmo. Por exemplo, um algoritmo para se vestir pode especificar que você vista primeiro as meias e os sapatos antes de vestir a calça enquanto outro algoritmo especifica que você deve primeiro vestir a calça e depois as meias e os sapatos. Fica claro que o primeiro algoritmo é mais difícil de executar que o segundo apesar de ambos levarem ao mesmo resultado.

Para um algoritmo fornecer uma solução satisfatória para um problema é necessário, primeiramente, que ele produza uma resposta correta e que além disso seja eficiente. O tempo e o espaço usados pelo algoritmo são as duas medidas principais para a eficiência deste. O tempo é medido contando o número de operações usa-

das por um algoritmo quando a entrada tem um determinado tamanho. O espaço é medido calculando o maior espaço de memória de que o algoritmo necessita, ver [9] .

A análise destas duas variáveis envolve a complexidade computacional de um algoritmo. Uma análise do tempo necessário para resolver um problema de um determinado tamanho envolve a complexidade temporal do algoritmo. Uma análise da memória computacional necessária envolve a complexidade espacial do algoritmo. Aqui, vamos chamar a atenção à complexidade temporal.

Na tabela abaixo apresentamos a terminologia geralmente usada para descrever a complexidade temporal dos algoritmos.

Complexidade	Terminologia
$\Theta(1)$	Complexidade constante
$\Theta(\log n)$	Complexidade logarítmica
$\Theta(n)$	Complexidade linear
$\Theta(n \log n)$	Complexidade $n \log n$
$\Theta(n^b)$	Complexidade polinomial
$\Theta(b^n)$, em que $b > 1$	Complexidade exponencial
$\Theta(n!)$	Complexidade fatorial

Um problema que é possível resolver usando um algoritmo com complexidade polinomial de pior caso é chamado de tratável. Mas quando isso não é possível chamamos de intratável. Entretanto, podemos lidar com problemas intratáveis quando aparecem em aplicações práticas, basta utilizar soluções aproximadas ao invés de soluções exatas.

Existem alguns problemas em que não há um algoritmo para resolvê-lo. Tais problemas são denominados insolúveis (em oposição a problemas solúveis, que podem ser resolvidos usando um algoritmo).

É interessante ressaltar que muitos problemas passíveis de serem solucionados têm a propriedade de que nenhum algoritmo com complexidade temporal polinomial no pior caso pode resolvê-los, mas uma solução, se for conhecida, pode ser verificada em tempo polinomial. Os problemas cujas soluções podem ser verificadas em tempo polinomial pertencem à classe NP (os tratáveis pertencem a classe P). Há também uma importante classe de problemas, chamada de problemas NP-completos, com a propriedade de que se qualquer um deles puder ser resolvido por um algoritmo em tempo polinomial no pior caso, então todos os problemas da classe NP podem ser resolvidos por algoritmos em tempo polinomial no pior caso.

Uma das questões abertas mais intrincadas na ciência da computação teórica é se todo problema em NP também está em P , ou seja, se $P = NP$. Este problema é um dos sete problemas conhecidos como *Problemas do Milênio*.

Referências Bibliográficas

- [1] Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.
- [2] Boaventura Netto, P.O., *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*, 4ª edição, Edgard Blücher, 2006.
- [3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [4] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory* (Graduate Texts in Mathematics), Springer, 2008.
- [5] Lovász L. and Plummer M.D, *Matching Theory*, North-Holland, 1986.
- [6] Chartrand, Gary and Zhang, Ping, *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill, 2005.
- [7] Diestel, Reinhard, *Graph theory* (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 1997.
- [8] Santos, José Plínio O., Mello, Margarida P. e Murari, Idani T. C., *Introdução à Análise Combinatória*, Rio de Janeiro : Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.
- [9] Szwarcfiter, Jayme Luiz, *Grafos e Algoritmos Computacionais*, 2ª edição, Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda., 1988.
- [10] Rosen, Kenneth H., *Matemática Discreta e suas aplicações*, 6ª edição; [tradução João Giudice], São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
- [11] Dasgupta, Sanjov, Papadimitriou, Christos e Vazirani, Umesh, *Algoritmos*; [tradução técnica Guilherme A. Pinto], São Paulo: McGraw-Hill, 2009.